线性代数应该这样学

习题解答

对应原书第四版

写在前面的话

你好！欢迎你翻开这份习题解答集。

这份文档记录了我个人学习 Sheldon Axler 教授那本备受推崇的教材《线性代数应该这样学》（第四版，请确认你的版本）时，一点一滴思考和解答习题的过程。初衷很简单：希望通过亲手解决每一道题，真正吃透线性代数那些精妙的概念与证明，锻炼自己的数学思维。将其整理成册并发布于 GitHub，是希望它能成为其他也在研习这本教材的学友的一个参考伙伴，或者说，一份思路上的借鉴。

这些解答主要源于我的独立思考，部分较困难的题目则是在与他人讨论或查阅资料后完成的。需要明确指出的是，这份解答集并非官方出品——它不是 Axler 教授或出版社认可的“标准答案”，纯粹是我个人学习过程中的理解与尝试。这意味着其中的解答可能并非最优解，甚至可能存在错误或不够严谨之处。

因此，恳请读者带着批判性思维看待其中的解答！我的理解或有局限，方法或显繁琐，甚至可能出错。若你发现任何问题，或有更清晰、更优美的解法，非常欢迎你通过 GitHub 仓库或邮件（链接见下方）告知我！

此外，这份解答集目前仍是一个“进行中的作品”。我还在继续学习，并将于时间和精力允许时，努力更新后续章节。进度会在 GitHub 仓库中同步，欢迎关注。

首先，由衷感谢 Sheldon Axler 教授，是他撰写了这本视角独特、强调理解本质的杰作，让线性代数的学习如此引人入胜。感谢中文版译者吴俊达、何阳同学，他们的译笔使这本经典教材更贴近中文读者。书中习题的表述基本参考并采用了他们的中文译本。特别感谢我的好友 LCW 和 ZRY，他们帮助我排查了逻辑错误、计算失误、表述不清等各类问题。

最后，也是最想说的，是感谢正在阅读这份解答集的你！无论是偶尔参考思路，还是认真提出指正，你的关注和使用都让这个原本是个人学习记录的项目有了更丰富的意义。能与众多同样热爱或正在学习线性代数的伙伴成为“同路人”，是一件非常开心的事。

方而静
2025 年 7 月

邮箱 szdytom@qq.com
GitHub https://github.com/szdytom/LADRSolutions
扫描左侧二维码亦可访问 GitHub 仓库。

目录

第 1 章 向量空间

1A $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$

习题 1 证明：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$ 对所有 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ 成立。

证明 根据定义，令 $\alpha=a+b\mathrm{i}$，$\beta=c+d\mathrm{i}$（其中 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$），则根据实数的加法交换律，有

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}\\&=(c+a)+(d+b)\mathrm{i}\\&=\beta+\alpha\end{aligned}$$

■

习题 2 证明：$(\alpha+\beta)+\lambda=\alpha+(\beta+\lambda)$ 对所有 $\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{C}$ 成立。

证明 根据定义，令 $\alpha=a+b\mathrm{i}$，$\beta=c+d\mathrm{i}$，$\lambda=e+f\mathrm{i}$（其中 $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$），则有

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)+\lambda&=((a+c)+(b+d)\mathrm{i})+(e+f\mathrm{i})\\&=(a+c+e)+(b+d+f)\mathrm{i}\\&=\alpha+(\beta+\lambda)\end{aligned}$$

■

习题 3 证明：$(\alpha\beta)\lambda=\alpha(\beta\lambda)$ 对所有 $\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{C}$ 成立。

证明 根据定义，令 $\alpha=a+b\mathrm{i}$，$\beta=c+d\mathrm{i}$，$\lambda=e+f\mathrm{i}$（其中 $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$），则有

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\lambda&=((a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i}))(e+f\mathrm{i})\\&=(ac-bd+(ad+bc)\mathrm{i})(e+f\mathrm{i})\\&=(ace-bde-(ad+bc)f)+((ad+bc)e+(ac-bd)f)\mathrm{i}\\&=\alpha(\beta\lambda)\end{aligned}$$

■

注 复数乘法的交换律由原书例 1.4 给出。

习题 4 证明：$\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$ 对所有 $\lambda,\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ 成立。

证明 根据定义，令 $\alpha=a+b\mathrm{i}$，$\beta=c+d\mathrm{i}$，$\lambda=e+f\mathrm{i}$（其中 $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$），则有

$$\begin{aligned}\lambda(\alpha+\beta) &= (e+f\mathrm{i})((a+c)+(b+d)\mathrm{i})\\ &= (e(a+c)-f(b+d))+(f(a+c)+e(b+d))\mathrm{i}\\ &= (ea-fb+ec-fd)+(fa+eb+fc+ed)\mathrm{i}\\ &= \lambda\alpha+\lambda\beta\end{aligned}$$

■

习题 5 证明：对于任意 $\alpha\in\mathbb{C}$，都存在唯一的 $\beta\in\mathbb{C}$ 使得 $\alpha+\beta=0$。

证明 根据定义，令 $\alpha=a+b\mathrm{i}$（其中 $a,b\in\mathbb{R}$），则取 $\beta=(-a)+(-b)\mathrm{i}$，则有

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= (a+b\mathrm{i})+((-a)+(-b)\mathrm{i})\\ &= (a-a)+(b-b)\mathrm{i}\\ &= 0\end{aligned}$$

因此，这样的 β 存在。为了说明其唯一性，假设存在另一个 β'，也满足 $\alpha+\beta'=0$，则有

$$\beta=\beta+0=\beta+(\alpha+\beta')=(\beta+\alpha)+\beta'=0+\beta'=\beta'$$

■

习题 6 证明：对于任意 $\alpha\in\mathbb{C}$（$\alpha\neq 0$），都存在唯一的 $\beta\in\mathbb{C}$ 使得 $\alpha\beta=1$。

证明 根据定义，令 $\alpha=a+b\mathrm{i}$（其中 $a,b\in\mathbb{R}$），则取 $\beta=\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)-\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)\mathrm{i}$，则有

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (a+b\mathrm{i})\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}\right)\\ &= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

因此，这样的 β 存在。为了说明其唯一性，我们假设存在另一个 β'，也满足 $\alpha\beta'=1$，则有

$$\beta=\beta\cdot 1=\beta(\alpha\beta')=(\beta\alpha)\beta'=1\cdot\beta'=\beta'$$

■

注 上面习题说明，$\mathbb{C}$ 构成一个域。

习题 7 证明：

$$\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

是 1 的立方根（意即它的立方等于 1）。

证明

$$\begin{aligned}\left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^3 &= \frac{\left(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^3}{8} \\ &= \frac{1}{8}\left((-1)^3+3(-1)^2\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)+3(-1)\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^2+\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^3\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(-1+3\sqrt{3}\mathrm{i}+9-3\sqrt{3}\mathrm{i}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

■

习题 8 求 i 的两个向异的平方根。

解答 令 $x=a+b\mathrm{i}$（其中 $a,b\in\mathbb{R}$），满足 $x^2=\mathrm{i}$，即 $a^2-b^2+2ab\mathrm{i}=0+1\mathrm{i}$。因此，我们有两个方程

$$\begin{cases}a^2-b^2=0\\2ab=1\end{cases}$$

解这两个方程组，我们得到 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 和 $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或者 $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 和 $b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$。因此，i 的两个向异的平方根是：

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i},\qquad x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$

习题 9 求 $x\in\mathbb{R}^4$，使得

$$(4,-3,1,7)+2x=(5,9,-6,8)$$

解答 根据定义，令 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$，则

$$(4,-3,1,7)+2x=(4+2x_1,-3+2x_2,1+2x_3,7+2x_4)$$

令其等于 $(5,9,-6,8)$，则我们有四个方程：

$$\begin{cases} 4+2x_1=5 \\ -3+2x_2=9 \\ 1+2x_3=-6 \\ 7+2x_4=8 \end{cases}$$

解这四个方程，我们得到 $x_1=\frac{1}{2}, x_2=6, x_3=-\frac{7}{2}, x_4=\frac{1}{2}$。因此，

$$x=\left(\frac{1}{2}, 6, -\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

习题 10 解释为什么不存在 $\lambda \in \mathbb{C}$，使得

$$\lambda(2-3\mathrm{i}, 5+4\mathrm{i}, -6+7\mathrm{i})=(12-5\mathrm{i}, 7+22\mathrm{i}, -32-9\mathrm{i})$$

解释 注意到，

$$\frac{12-5\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}=3+2\mathrm{i}$$

而

$$\frac{-32-9\mathrm{i}}{-6+7\mathrm{i}} \neq 3+2\mathrm{i}$$

因此，这样的 λ 不存在。

习题 11 证明：$(x+y)+z=x+(y+z)$ 对所有 $x, y, z \in \mathbb{F}^n$ 成立。

注 沿用原书记号 1.6 与记号 1.10，即 $\mathbb{F}$ 表示 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，n 表示某一固定的正整数。下文不再赘述。

证明 根据定义，令 $x=(x_1, \dots, x_n)$，$y=(y_1, \dots, y_n)$，$z=(z_1, \dots, z_n)$，则有

$$\begin{aligned} (x+y)+z &= ((x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)+(z_1, \dots, z_n)) \\ &= (x_1+y_1+z_1, \dots, x_n+y_n+z_n) \\ &= ((x_1, \dots, x_n)+(y_1+z_1, \dots, y_n+z_n)) \\ &= x+(y+z) \end{aligned}$$

■

注 $\mathbb{F}^n$ 上向量的加法交换律由原书 1.14 给出。

习题 12 证明：$(ab)x=a(bx)$ 对所有 $x \in \mathbb{F}^n$ 和 $a, b \in \mathbb{F}$ 成立。

证明 根据定义，令 $x=(x_1, \dots, x_n)$，则有

$$
\begin{aligned}
(ab)x &= (ab)(x_1, \ldots, x_n) \\
&= (abx_1, \ldots, abx_n) \\
&= a(bx_1, \ldots, bx_n)) \\
&= a(bx)
\end{aligned}
$$

■

习题 13 证明：$1x = x$ 对所有 $x \in \mathbb{F}^n$ 成立。

证明 根据定义，令 $x = (x_1, \ldots, x_n)$，则有

$$
\begin{aligned}
1x &= 1(x_1, \ldots, x_n) \\
&= (1 \cdot x_1, \ldots, 1 \cdot x_n) \\
&= (x_1, \ldots, x_n) \\
&= x
\end{aligned}
$$

■

习题 14 证明：$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{F}$ 和 $x, y \in \mathbb{F}^n$ 成立。

证明 根据定义，令 $x = (x_1, \ldots, x_n)$，$y = (y_1, \ldots, y_n)$，则有

$$
\begin{aligned}
\lambda(x+y) &= \lambda((x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)) \\
&= (\lambda(x_1 + y_1), \ldots, \lambda(x_n + y_n)) \\
&= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \ldots, \lambda x_n + \lambda y_n) \\
&= \lambda x + \lambda y
\end{aligned}
$$

■

习题 15 证明：$(a+b)x = ax + bx$ 对所有 $a, b \in \mathbb{F}$ 和 $x \in \mathbb{F}^n$ 成立。

证明 根据定义，令 $x = (x_1, \ldots, x_n)$，则有

$$
\begin{aligned}
(a+b)x &= (a+b)(x_1, \ldots, x_n) \\
&= (ax_1 + bx_1, \ldots, ax_n + bx_n) \\
&= (ax_1, \ldots, ax_n) + (bx_1, \ldots, bx_n) \\
&= ax + bx
\end{aligned}
$$

■

$\mathbb{F}^n$ 是向量空间

在原书的下一个小节（1B 向量空间的定义）中，正式给出了向量空间的定义。其实上面的习题就是在引导我们去验证：$\mathbb{F}^n$ 是一个向量空间。具体而言，原书 1.13 和定义 1.18 分别给出的 $\mathbb{F}^n$ 上的加法和标量乘法的定义，而我们已经证明了其所需满足的性质：

可交换性
原书 1.14

可结合性
习题 11 和习题 12

加法单位元
原书记号 1.15 定义了 0，其性质容易验证

加法逆元
原书 1.17

乘法单位元
习题 13

分配性质
习题 14 和习题 15

1B 向量空间的定义

习题 1 证明：$-(-v)=v$ 对任意 $v\in V$ 都成立。

注 沿用原书记号 1.29，即 V 表示 $\mathbb{F}$ 上的向量空间。下文不再赘述。

证明 根据定义 $v+(-v)=0$，由可交换性，得 $(-v)+v=0$，即 v 是 $-v$ 的加法逆元。由加法逆元的唯一性（原书 1.27），得 $-(-v)=v$。■

习题 2 设 $a\in\mathbb{F}$，$v\in V$ 且 $av=0$，证明：$a=0$ 或 $v=0$。

证明 我们使用反证法，假设 $a\neq 0$ 且 $v\neq 0$，同时 $av=0$。由于 $a\neq 0$ 故存在 $a^{-1}\in\mathbb{F}$（$a^{-1}\neq 0$），使得 $a^{-1}a=1$。因此有

$$1v=a^{-1}av=a^{-1}(av)=a^{-1}0=0$$

这与 $v\neq 0$ 矛盾，假设不成立。因此，$a=0$ 或 $v=0$。■

习题 3 设 $u,w\in V$，解释为什么存在唯一的 $x\in V$ 使得 $v+3x=w$。

解释 取 $x=\frac{1}{3}(w-v)$，则有 $v+3x=v+3\big(\frac{1}{3}(w-v)\big)=v+(w-v)=w$。由于向量空间的加法和数乘满足封闭性，因此这样的 x 存在于 V 中。

为了说明其唯一性，假设存在另一个 $x'\in V$ 使得 $v+3x'=w$，则有

$$v+3x=w=v+3x'$$

在等式两边同时加上 $-v$，化简得 $3x=3x'$，等式两边同时乘以 $\frac{1}{3}$，得 $x=x'$。因此，这样的 x 是唯一的。

习题 4 空集不是向量空间。对于在向量空间的定义（原书 1.20）中列出的要求，空集仅不满足其中的一条。是哪一条？

解答 空集中不存在加法单位元。

习题 5 证明：在向量空间的定义（原书 1.20）中，加法逆元条件可以替换为这一条件——

$$0v=0\text{ 对所有 }v\in V\text{ 成立。}$$

这里，左侧的 0 是数 0，而右侧的 0 是 V 中的加法单位元。

提示 在定义中“条件可以替换”，指原来的条件替换成新条件后，满足定义的对象还是原来的那些。

证明 采用原有定义时，新条件成立的证明由原书 1.30 给出。我们现在采用替换后的新定义，并以此证明加法逆元条件，即“对于任意 $v \in V$，都存在 $w \in V$ 使得 $v + w = 0$”。

更具体地，我们说明 $v + (-1)v = 0$。这是由于

$$v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = 0$$

所以对于任意 $v \in V$，它的加法逆元都存在，即 $(-1)v$。故两个条件可以相互替换。■

注 值得一提的是，习题 5 的证明和原书 1.32 的证明的核心部分完全一样。

习题 6 令 ∞ 和 $-\infty$ 是不在 $\mathbb{R}$ 中的不同对象。以最符合直觉的方式定义 $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ 上的加法和标量乘法。具体而言，两个实数的和和积照常定义，而对于 $t \in \mathbb{R}$，我们定义

$$t\infty = \begin{cases} -\infty & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ \infty & t > 0 \end{cases} \qquad t(-\infty) = \begin{cases} \infty & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ -\infty & t > 0 \end{cases}$$

以及

$$\begin{aligned} t + \infty = \infty + t = \infty + \infty = \infty \\ t + (-\infty) = (-\infty) + t = (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\ \infty + (-\infty) = (-\infty) + \infty = 0 \end{aligned}$$

具有这样的加法和标量乘法的 $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间吗？解释一下。

解答 不是。任取 $t \in \mathbb{R}$（$t \neq 0$），注意到，

$$\begin{aligned} (t + \infty) + (-\infty) = \infty + (-\infty) = 0 \\ t + (\infty + (-\infty)) = t + 0 = t \end{aligned}$$

这违背了加法的可结合性要求。因此，$\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ 不是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间。

习题 7 设 S 是非空集合，令 V^S 表示所有从 S 到 V 的函数构成的集合。请在 V^S 定义一种自然的加法和标量乘法，并证明：具有这些定义的 V^S 是向量空间。

证明 我们按如下方式定义 V^S 上的加法和标量乘法：

- 对于 $f, g \in V^S$，和 $f + g \in V^S$ 是由下式定义的函数：对于任意 $x \in S$，

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- 对于 $\lambda \in \mathbb{F}$ 和 $f \in V^S$，乘积 $\lambda f \in V^S$ 是由下式定义的函数：对于任意 $x \in S$，

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

我们现在证明 V^S 是 $\mathbb{F}$ 上的向量空间。具体而言，我们逐条验证向量空间的定义（原书 1.20）中的要求：

可交换性 对于任意 $f, g \in V^S$，都有 $f+g=g+f$。
证明：设 $x \in S$，有

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x)$$

因此 $f+g=g+f$。

可结合性 对于任意 $f, g, h \in V^S$ 以及 $a, b \in \mathbb{F}$，都有 $(f+g)+h=f+(g+h)$ 且 $(ab)f=a(bf)$。
证明：设 $x \in S$，则对于加法的结合性，有

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x)+h(x)\\ &= f(x)+g(x)+h(x)\\ &= f(x)+(g+h)(x)\\ &= (f+(g+h))(x)\end{aligned}$$

因此 $(f+g)+h=f+(g+h)$。对于标量乘法的结合性，有

$$\begin{aligned}((ab)f)(x) &= (ab)(f(x))\\ &= a(bf(x))\\ &= a((bf)(x))=(a(bf))(x)\end{aligned}$$

因此 $(ab)f=a(bf)$。

加法单位元 存在 $0 \in V^S$ 使得对于任意 $f \in V^S$，都有 $f+0=f$。
证明：取 $0: x \mapsto 0$ 为 V^S 中的加法单位元。设 $x \in S$，对于任意 $f \in V^S$，都有

$$(f+0)(x)=f(x)+0=f(x)=(f)(x)$$

因此 $f+0=f$。

加法逆元 对于任意 $f \in V^S$，存在 $g \in V^S$ 使得 $f+g=0$。
证明：取 $g: x \mapsto -f(x)$ 为 f 的加法逆元。设 $x \in S$，都有

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=f(x)-f(x)=0$$

因此 $f+g=0$。

乘法单位元 对于任意 $f \in V^S$，都有 $1f=f$。
证明：设 $x \in S$，都有

$$(1f)(x)=1f(x)=f(x)$$

因此 $1f=f$。

分配性质 对于任意 $f, g \in V^S$ 以及所有 $a, b \in \mathbb{F}$，都有 $a(f+g)=af+ag$ 且 $(a+b)f=af+bf$。
证明：设 $x \in S$，则对于第一个分配性质，有

$$\begin{aligned}(a(f+g))(x) &= a((f+g)(x)) = a(f(x)+g(x)) \\ &= af(x)+ag(x) = (af)(x)+(ag)(x) \\ &= (af+ag)(x)\end{aligned}$$

因此 $a(f+g)=af+ag$。对于第二个分配性质，有

$$\begin{aligned}((a+b)f)(x) &= (a+b)f(x) \\ &= af(x)+bf(x) \\ &= (af)(x)+(bf)(x) \\ &= (af+bf)(x)\end{aligned}$$

因此 $(a+b)f=af+bf$。

综上所述，V^S 满足向量空间的所有要求，因此 V^S 是 $\mathbb{F}$ 上的向量空间。■

习题 8 设 V 是实向量空间。

- V 的**复化（complexification）**记为 $V_{\mathbf{C}}$，等于 $V\times V$。$V_{\mathbf{C}}$ 中的所有元素为有序对 (u,v)，其中 $u,v\in V$，不过我们将其记作 $u+\mathrm{i}v$。
- $V_{\mathbf{C}}$ 上的加法定义为

$$(u_1+\mathrm{i}v_1)+(u_2+\mathrm{i}v_2)=(u_1+u_2)+\mathrm{i}(v_1+v_2)$$

  对所有 $u_1,v_1,u_2,v_2\in V$ 都成立。
- $V_{\mathbf{C}}$ 上的标量乘法定义为

$$(a+b\mathrm{i})(u+\mathrm{i}v)=(au-bv)+\mathrm{i}(av+bu)$$

  对所有 $a,b\in\mathbb{R}$ 和所有 $u,v\in V$ 都成立。

证明：具有如上加法和标量乘法定义的 $V_{\mathbf{C}}$ 是向量空间。

注 将 $u\in V$ 等同于 $u+\mathrm{i}0$，从而将 V 视为 $V_{\mathbf{C}}$ 的一个子集。这样一来，由 V 构造 $V_{\mathbf{C}}$ 就可以视作由 $\mathbb{R}^n$ 构造 $\mathbb{C}^n$ 的推广。

证明 我们将说明 $V_{\mathbf{C}}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间。具体而言，我们逐条验证向量空间的定义（原书 1.20）中的要求：

可交换性 对于任意 $u,v\in V_{\mathbf{C}}$，都有 $u+v=v+u$。

证明：设 $u_1,v_1,u_2,v_2\in V$，由加法的可交换性，$u_1+u_2=u_2+u_1$ 且 $v_1+v_2=v_2+v_1$，因此

$$\begin{aligned}(u_1+\mathrm{i}v_1)+(u_2+\mathrm{i}v_2) &= (u_1+u_2)+\mathrm{i}(v_1+v_2) \\ &= (u_2+u_1)+\mathrm{i}(v_2+v_1) \\ &= (u_2+\mathrm{i}v_2)+(u_1+\mathrm{i}v_1)\end{aligned}$$

可结合性 对于任意 $u, v, w \in V_{\mathbf{C}}$ 以及 $a, b \in \mathbb{C}$，都有 $(u+v)+w=u+(v+w)$ 且 $(ab)u=a(bu)$。

证明：设 $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 \in V$，则对于加法的结合性，有

$$\begin{aligned}
&((u_1+\mathrm{i}v_1)+(u_2+\mathrm{i}v_2))+(u_3+\mathrm{i}v_3)\\
=\;&((u_1+u_2)+\mathrm{i}(v_1+v_2))+(u_3+\mathrm{i}v_3)\\
=\;&(u_1+u_2+u_3)+\mathrm{i}(v_1+v_2+v_3)\\
=\;&(u_1+\mathrm{i}v_1)+((u_2+\mathrm{i}v_2)+(u_3+\mathrm{i}v_3))\\
=\;&(u_1+\mathrm{i}v_1)+(u_2+u_3)+\mathrm{i}(v_2+v_3)
\end{aligned}$$

另一方面，对于标量乘法的结合性，有

$$\begin{aligned}
(ab)(u+\mathrm{i}v)&=(ab)(u_1+\mathrm{i}v_1)\\
&=(abu_1-abv_1)+\mathrm{i}(abv_1+abu_1)\\
&=a(bu_1-bv_1)+\mathrm{i}(abv_1+abu_1)\\
&=a(b(u_1+\mathrm{i}v_1))\\
&=a(b(u+\mathrm{i}v))
\end{aligned}$$

加法单位元 存在 $0 \in V_{\mathbf{C}}$，使得对于任意 $u \in V_{\mathbf{C}}$，都有 $u+0=u$。

证明：取 $0=0+\mathrm{i}0$ 为 $V_{\mathbf{C}}$ 中的加法单位元。对于任意 $u, v \in V$，都有

$$\begin{aligned}
(u+\mathrm{i}v)+0&=(u+\mathrm{i}v)+(0+\mathrm{i}0)\\
&=(u+0)+\mathrm{i}(v+0)\\
&=u+\mathrm{i}v
\end{aligned}$$

加法逆元 对于任意 $u \in V_{\mathbf{C}}$，存在 $w \in V_{\mathbf{C}}$ 使得 $u+w=0$。

证明：设 $u, v \in V$，取 $w=-u+\mathrm{i}(-v)$ 为 $(u+\mathrm{i}v)$ 的加法逆元。则

$$\begin{aligned}
(u+\mathrm{i}v)+w&=(u+\mathrm{i}v)+(-u+\mathrm{i}(-v))\\
&=(u-u)+\mathrm{i}(v-v)\\
&=0+\mathrm{i}0\\
&=0
\end{aligned}$$

乘法单位元 对于任意 $u \in V_{\mathbf{C}}$，都有 $1u=u$。

证明：对于任意 $u, v \in V$，都有

$$(1+0\mathrm{i})(u+\mathrm{i}v)=(1u-0v)+\mathrm{i}(1v+0u)=u+\mathrm{i}v$$

分配性质 对于任意 $u, v \in V_{\mathbf{C}}$ 以及 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$，都有 $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$ 且 $(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$。

证明：对于任意 $u_1, v_1, u_2, v_2 \in V$ 和 $a, b \in \mathbb{R}$，都有

$$
\begin{aligned}
&(a+b\mathrm{i})((u_1+\mathrm{i}v_1)+(u_2+\mathrm{i}v_2))\\
=&(a+b\mathrm{i})((u_1+u_2)+\mathrm{i}(v_1+v_2))\\
=&(a(u_1+u_2)-b(v_1+v_2))+\mathrm{i}(a(v_1+v_2)+b(u_1+u_2))\\
=&(au_1-bv_1+au_2-bv_2)+\mathrm{i}(av_1+bu_1+av_2+bu_2)\\
=&(a+b\mathrm{i})(u_1+\mathrm{i}v_1)+(a+b\mathrm{i})(u_2+\mathrm{i}v_2)
\end{aligned}
$$

另一方面，对于任意 $u, v \in V$ 和 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$，

$$
\begin{aligned}
&((a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i}))(u+\mathrm{i}v)\\
=&(a+c)u-(b+d)v+\mathrm{i}((a+b)v+(c+d)u)\\
=&((au-bv)+(cu-dv))+\mathrm{i}((av+bu)+(cv+du))\\
=&((a+b\mathrm{i})(u+\mathrm{i}v))+((c+d\mathrm{i})(u+\mathrm{i}v))
\end{aligned}
$$

综上所述，V_{C} 满足向量空间的所有要求，因此 V_{C} 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间。 ■

1C 子空间

习题 1 对于 $\mathbb{F}^3$ 的下列各个子集，判断其是否是 $\mathbb{F}^3$ 的子空间：

(a) $\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{F}^3 : x_1+2x_2+3x_3=0\}$
(b) $\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{F}^3 : x_1+2x_2+3x_3=4\}$
(c) $\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{F}^3 : x_1x_2x_3=0\}$
(d) $\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{F}^3 : x_1=5x_3\}$

解答 方便起见，将这四个集合分别记作 S_1,S_2,S_3,S_4。为了验证它们是否是 $\mathbb{F}^3$ 的子空间，我们需要验证它们是否满足子空间的条件（原书 1.34）。

对于 S_1，我们验证以下三个条件：

加法单位元 $0\in S_1$。
证明：注意到 $0+2\cdot 0+3\cdot 0=0$，故 $0\in S_1$。

加法封闭性 $u,w\in S_1$ 意味着 $u+w\in S_1$。
证明：设 $u=(u_1,u_2,u_3)$，$w=(w_1,w_2,w_3)$，则 $u+w=(u_1+w_1,u_2+w_2,u_3+w_3)$。由于 $u_1+2u_2+3u_3=0$ 且 $w_1+2w_2+3w_3=0$，因此

$$\begin{aligned}(u+w)_1+2(u+w)_2+3(u+w)_3&=(u_1+w_1)+2(u_2+w_2)+3(u_3+w_3)\\&=(u_1+2u_2+3u_3)+(w_1+2w_2+3w_3)\\&=0+0=0\end{aligned}$$

故 $u+w\in S_1$。

数乘封闭性 $a\in\mathbb{F}$ 且 $u\in S_1$ 意味着 $au\in S_1$。
证明：设 $u=(u_1,u_2,u_3)$，则 $au=(au_1,au_2,au_3)$。由于 $u_1+2u_2+3u_3=0$，因此

$$\begin{aligned}(au)_1+2(au)_2+3(au)_3&=au_1+2au_2+3au_3\\&=a(u_1+2u_2+3u_3)\\&=a\cdot 0=0\end{aligned}$$

故 $au\in S_1$。

综上所述，S_1 是 $\mathbb{F}^3$ 的子空间。

对于 S_2，注意到 $0+2\cdot 0+3\cdot 0=0\neq 4$，故 $0\notin S_2$。这违反了“加法单位元”的要求，说明 S_2 不是 $\mathbb{F}^3$ 的子空间。

对于 S_3，取 $u=(1,1,0)\in S_3$，$v=(0,0,1)\in S_3$，注意到 $u+v=(1,1,1)\notin S_3$，这违反了“加法封闭性”的要求，说明 S_3 不是 $\mathbb{F}^3$ 的子空间。

对于 S_4，我们验证以下三个条件：

加法单位元 $0 \in S_4$。

证明：注意到 $0 = 5 \cdot 0$，故 $0 \in S_4$。

加法封闭性 $u, w \in S_4$ 意味着 $u + w \in S_4$。

证明：设 $u = (u_1, u_2, u_3)$，$w = (w_1, w_2, w_3)$，则 $u + w = (u_1 + w_1, u_2 + w_2, u_3 + w_3)$。由于 $u_1 = 5u_3$ 且 $w_1 = 5w_3$，因此

$$u_1 + w_1 = 5u_3 + 5w_3 = 5(u_3 + w_3)$$

故 $u + w \in S_4$。

数乘封闭性 $a \in \mathbb{F}$ 且 $u \in S_4$ 意味着 $au \in S_4$。

证明：设 $u = (u_1, u_2, u_3)$，则 $au = (au_1, au_2, au_3)$。由于 $u_1 = 5u_3$，因此

$$au_1 = a(5u_3) = 5(au_3)$$

故 $au \in S_4$。

综上所述，S_4 是 $\mathbb{F}^3$ 的子空间。

习题 2 验证下面这些有关子空间的结论。

(a) 如果 $b \in \mathbb{F}$，那么当且仅当 $b = 0$ 时，

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}^4 : x_3 = 5x_4 + b\}$$

是 $\mathbb{F}^4$ 的子空间；

(b) 定义在区间 $[0, 1]$ 上的全体连续实值函数构成的集合是 $\mathbb{R}^{[0,1]}$ 的子空间；

(c) 定义在 $\mathbb{R}$ 上的全体可微实值函数构成的集合是 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 的子空间；

(d) 当且仅当 $b = 0$ 时，定义在区间 $(0, 3)$ 上且满足 $f'(2) = b$ 的全体可微实值函数 f 构成的集合是 $\mathbb{R}^{(0,3)}$ 的子空间；

(e) 极限为 0 的所有复数序列所构成的集合是 $\mathbb{C}^\infty$ 的子空间。

说明 本题原文为“验证例 1.35 中关于子空间的所有结论”。出于完整性考虑，这里将原书例 1.35 的所有结论摘录在上面。

解释 我们逐个验证这些结论。对于第一个结论，我们首先验证其充分性。当 $b = 0$ 时，此时集合 $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}^4 : x_3 = 5x_4\}$。我们逐条验证其满足子空间的条件（原书 1.34）：

加法单位元 $0 \in S$。

证明：注意到 $0 + 5 \cdot 0 = 0$，故 $0 \in S$。

加法封闭性 $u, w \in S$ 意味着 $u + w \in S$。

证明：设 $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$，$w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$，则 $u + w = (u_1 + w_1, u_2 + w_2, u_3 + w_3, u_4 + w_4)$。由于 $u_3 = 5u_4$ 且 $w_3 = 5w_4$，因此

$$(u + w)_3 = (u_3 + w_3) = 5(u_4 + w_4)$$

故 $u+w\in S$。

数乘封闭性 $a\in\mathbb{F}$ 且 $u\in S$ 意味着 $au\in S$。

证明：设 $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)$，则 $au=(au_1,au_2,au_3,au_4)$。由于 $u_3=5u_4$，因此

$$(au)_3=au_3=a(5u_4)=5(au_4)$$

故 $au\in S$。

综上所述，当 $b=0$ 时，S 是 $\mathbb{F}^4$ 的子空间。

为了说明其必要性，我们假定 $b\neq 0$，此时，注意到 $0+5\cdot 0+b=b\neq 0$，故 $0\notin S$。这违反了“加法单位元”的要求，说明当 $b\neq 0$ 时，S 不是 $\mathbb{F}^4$ 的子空间。由此，我们证明了第一个结论。

第二个结论和第三个结论具有较强的数学分析背景，严格论证大大超出了“代数”的范围。从直觉上说，两个连续函数的和仍然是连续的，两个可微函数的和仍然是可微的，连续函数的数乘仍然是连续的，可微函数的数乘仍然是可微的，以及函数 $x\mapsto 0$ 自然是连续且可微的。因此这两个集合都是子空间。我们不再详细论证。

对于第四个结论，我们首先验证其充分性。当 $b=0$ 时，集合 $S=\{(f\in\mathbb{R}^{(0,3)}:f'(2)=0\}$。我们逐条验证其满足子空间的条件（原书 1.34）：

加法单位元 $0\in S$。

证明：注意到 $0'(2)=0$，故 $0\in S$。

加法封闭性 $u,w\in S$ 意味着 $u+w\in S$。

证明：设 $u,w\in S$，则 $u'(2)=0$ 且 $w'(2)=0$。因此

$$(u+w)'(2)=u'(2)+w'(2)=0+0=0$$

故 $u+w\in S$。

数乘封闭性 $a\in\mathbb{R}$ 且 $u\in S$ 意味着 $au\in S$。

证明：设 $u\in S$，则 $u'(2)=0$。因此

$$(au)'(2)=au'(2)=a\cdot 0=0$$

故 $au\in S$。

综上所述，当 $b=0$ 时，S 是 $\mathbb{R}^{(0,3)}$ 的子空间。下面说明其必要性。假设 $b\neq 0$，此时，注意到 $0'(2)=0\neq b$，故 $0\notin S$。这违反了“加法单位元”的要求，说明当 $b\neq 0$ 时，S 不是 $\mathbb{R}^{(0,3)}$ 的子空间。由此，我们证明了第四个结论。

第五个结论也具有较强的数学分析背景，严格论证大大超出了“代数”的范围。从直觉上说，是很容易理解的，在此不再详细论证。

习题 3 证明：在区间 $(-4,4)$ 上的满足 $f'(-1)=3f(2)$ 的可微实值函数 f 构成的集合是 $\mathbb{R}^{(-4,4)}$ 的子空间。

证明 记 S 为题目所说的子集，即 $S=\{f\in\mathbb{R}^{(-4,4)}:f'(-1)=3f(2)\}$。我们逐条验证其满足子空间的条件（原书 1.34）：

加法单位元 $0\in S$。

证明：注意到 $0'(-1)=0=3\cdot 0=3\cdot 0(2)$，故 $0\in S$。

加法封闭性 $u,w\in S$ 意味着 $u+w\in S$。

证明：设 $u,w\in S$，则 $u'(-1)=3u(2)$ 且 $w'(-1)=3w(2)$。因此

$$(u+w)'(-1)=u'(-1)+w'(-1)=3u(2)+3w(2)=3(u(2)+w(2))$$

故 $u+w\in S$。

数乘封闭性 $a\in\mathbb{R}$ 且 $u\in S$ 意味着 $au\in S$。

证明：设 $u\in S$，则 $u'(-1)=3u(2)$。因此

$$(au)'(-1)=au'(-1)=a\cdot 3u(2)=3(au(2))$$

故 $au\in S$。

综上所述，满足条件的集合是 $\mathbb{R}^{(-4,4)}$ 的子空间。

习题 4 设 $b\in\mathbb{R}$，证明：在区间 $[0,1]$ 上满足 $\int_0^1 f=b$ 的连续实值函数 f 构成的集合是 $\mathbb{R}^{[0,1]}$ 的子空间，当且仅当 $b=0$。

证明 我们首先说明其充分性。假设 $b=0$，此时 $S=\{f\in\mathbb{R}^{[0,1]}:\int_0^1 f=0\}$，我们逐条验证其满足子空间的条件（原书 1.34）：

加法单位元 $0\in S$。

证明：注意到 $\int_0^1 0=0$，故 $0\in S$。

加法封闭性 $u,w\in S$ 意味着 $u+w\in S$。

证明：设 $u,w\in S$，则

$$\int_0^1(u+w)=\int_0^1 u+\int_0^1 w=0+0=0$$

故 $u+w\in S$。

数乘封闭性 $a\in\mathbb{R}$ 且 $u\in S$ 意味着 $au\in S$。

证明：设 $u\in S$，则

$$\int_0^1(au)=a\int_0^1 u=a\cdot 0=0$$

故 $au\in S$。

综上所述，当 $b=0$ 时，S 是 $\mathbb{R}^{[0,1]}$ 的子空间。

习题 5 $\mathbb{R}^2$ 是不是复向量空间 $\mathbb{C}^2$ 的子空间？

解答 不是。注意到，取 $v=(1,0)\in\mathbb{R}^2$，则

$$\mathrm{i}v=(\mathrm{i},0)\notin\mathbb{R}^2$$

这违反了子空间的条件（原书 1.34）中对“数乘封闭性”的要求。由此，$\mathbb{R}^2$ 不是 $\mathbb{C}^2$ 的子空间。

习题 6

(a) $\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a^3=b^3\}$ 是不是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间?

(b) $\{(a,b,c)\in\mathbb{C}^3 : a^3=b^3\}$ 是不是 $\mathbb{C}^3$ 的子空间?

证明 我们首先来看第一个集合 $S_{\mathbb{R}}=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a^3=b^3\}$。当 $a^3=b^3$ 时，$a^3-b^3=0$，即

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=0$$

当 $ab>0$ 时，

$$a^2+ab+b^2>a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\geq 0$$

当 $ab<0$ 时，

$$a^2+ab+b^2>a^2+2ab+b^2=(a+b)^2\geq 0$$

即当 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$ 时，$a^2+ab+b^2>0$。此时，必然有 $a-b=0$，即 $a=b$。而 $a=b=0$ 时，自然也有 $a=b$。综上所述，$a^3=b^3$ 意味着 $a=b$。

由此，我们可以将 $S_{\mathbb{R}}$ 重写为 $S_{\mathbb{R}}=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a=b\}$。我们逐条验证其满足子空间的条件（原书 1.34）：

加法单位元 $0\in S_{\mathbb{R}}$。

证明：注意到 $0=0$，故 $0\in S_{\mathbb{R}}$。

加法封闭性 $u,w\in S_{\mathbb{R}}$ 意味着 $u+w\in S_{\mathbb{R}}$。

证明：设 $u=(u_1,u_2,u_3)$, $w=(w_1,w_2,w_3)$，则 $u+w=(u_1+w_1,u_2+w_2,u_3+w_3)$。由于 $u_1=u_2$ 且 $w_1=w_2$，因此

$$u_1+w_1=u_2+w_2$$

故 $u+w\in S_{\mathbb{R}}$。

数乘封闭性 $a\in\mathbb{R}$ 且 $u\in S_{\mathbb{R}}$ 意味着 $au\in S_{\mathbb{R}}$。

证明：设 $u=(u_1,u_2,u_3)$，则 $au=(au_1,au_2,au_3)$。由于 $u_1=u_2$，因此

$$au_1=au_2$$

故 $au\in S_{\mathbb{R}}$。

综上所述，$S_{\mathbb{R}}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间。

对于第二个集合 $S_{\mathbb{C}}=\{(a,b,c)\in\mathbb{C}^3 : a^3=b^3\}$，注意到，取

$$u=\left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},1,0\right),\quad v=\left(\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},1,0\right)$$

容易验证 $u,v\in S_{\mathbb{C}}$，而

$$u+v=(-1,2,0)\notin S_{\mathbb{C}}$$

这违反了子空间的条件（原书 1.34）中对“加法封闭性”的要求。由此，$S_{\mathbb{C}}$ 不是 $\mathbb{C}^3$ 的子空间。■

习题 7 证明或证伪：如果 U 是 $\mathbb{R}^2$ 的非空子集，满足对加法封闭和对“取加法逆元”封闭（即 $u\in U$ 意味着 $-u\in U$），那么 U 是 $\mathbb{R}^2$ 的子空间。

证明 取 $U=\{(1,0),(0,0),(-1,0)\}$，容易验证 U 满足对加法封闭和对“取加法逆元”封闭。但是，取 $u=(1,0)\in U$，$2u=(2,0)\notin U$，这违反了子空间的条件（原书 1.34）中对“数乘封闭性”的要求。由此，U 不是 $\mathbb{R}^2$ 的子空间。

我们找到了一个反例，这说明题目中的命题不成立。■

注 还可以取 $U=\{(a,b):a,b\in\mathbb{Q}\}$ 作为反例。

习题 8 给出一例：$\mathbb{R}^2$ 的非空子集 U，满足对标量数乘封闭，但不是 $\mathbb{R}^2$ 的子空间。

解答 取

$$U=\{(a,0):a\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,a):a\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$$

这个集合满足对标量数乘封闭，但不满足对加法封闭。比如，取 $u=(1,0)\in U$，$v=(0,1)\in U$，则 $u+v=(1,1)\notin U$。因此 U 不是 $\mathbb{R}^2$ 的子空间。

习题 9 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 被成为**周期的（periodic）**，是指存在一正数 p，使得 $f(x)=f(x+p)$ 对所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立。$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 上的周期函数构成的集合是不是 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 的子空间？请作解释。

解答 不是。取 $f(x)=\sin(x)$，$g(x)=\sin\left(\sqrt{2}x\right)$。容易验证，对于任意 $x\in\mathbb{R}$，

$$f(x+2\pi)=f(x)$$
$$g\left(x+\sqrt{2}\pi\right)=g(x)$$

因此 f 和 g 都是 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 中的周期函数。现在令 $h=f+g$。下面说明 h 不是周期函数。

使用反证法，假设存在实数 $p>0$，满足 $h(x)=h(x+p)$ 对所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立，即

$$\sin(x)+\sin\left(\sqrt{2}x\right)=\sin(x+p)+\sin\left(\sqrt{2}x+\sqrt{2}p\right)\qquad\text{（式 1）}$$

对式 1 两边同时求导两次，得到

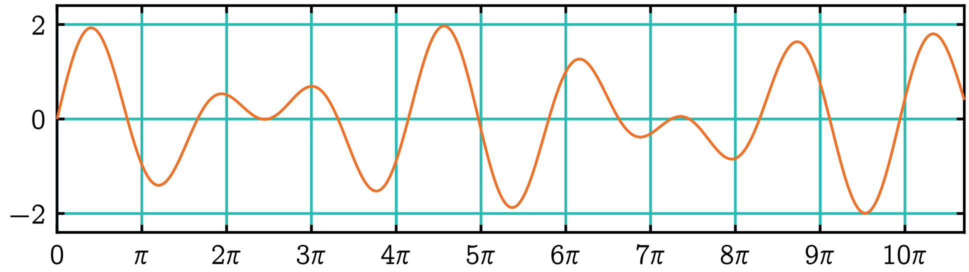

图 1　函数 $h(x)=\sin(\pi x)+\sin\left(\sqrt{2}\pi x\right)$ 的图像。

$$-\sin(x)-2\sin\left(\sqrt{2}x\right)=-\sin(x+p)-2\sin\left(\sqrt{2}x+\sqrt{2}p\right) \qquad \text{（式 2）}$$

将式 1 与式 2 相加并化简，得到

$$\sin\left(\sqrt{2}x\right)=\sin\left(\sqrt{2}x+\sqrt{2}p\right) \qquad \text{（式 3）}$$

进一步将式 1 减去式 3，得到

$$\sin(x)=\sin(x+p) \qquad \text{（式 4）}$$

向式 3 与式 4 中代入 $x=0$，得到

$$\sin(p)=\sin\left(\sqrt{2}p\right)=0$$

这意味着存在 $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$，使得 $\sqrt{2}p=2k_1\pi$ 且 $p=2k_2\pi$。联立消去 p，得到 $\sqrt{2}=k_1/k_2$，这与我们熟知的 $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ 矛盾，故假设不成立。

综上所述，h 不是 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 上的周期函数。这表明 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 上的周期函数构成的集合并不符合子空间的条件（原书 1.34）中对“加法封闭性”的要求，因此其不是 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 的子空间。

习题 10　设 V_1 和 V_2 都是 V 的子空间，证明：交集 $V_1\cap V_2$ 是 V 的子空间。

证明　记 $S=V_1\cap V_2$，我们逐条验证其满足子空间的条件（原书 1.34）：

加法单位元　$0\in S$。

证明：由于 V_1 和 V_2 都是 V 的子空间，因此 $0\in V_1$ 且 $0\in V_2$，从而 $0\in S$。

加法封闭性　$u,w\in S$ 意味着 $u+w\in S$。

证明：设 $u,w\in S$，则

$$u\in V_1, w\in V_1, u\in V_2, w\in V_2$$

因此 $u+w\in V_1$ 且 $u+w\in V_2$，从而 $u+w\in S$。

数乘封闭性　$a\in V$ 且 $u\in S$ 意味着 $au\in S$。

证明：设 $u\in S$，则

$$u\in V_1, u\in V_2$$

因此 $au\in V_1$ 且 $au\in V_2$，从而 $au\in S$。

综上所述，$V_1 \cap V_2$ 是 V 的子空间。■

习题 11 证明：V 的任意一族子空间的交集是 V 的子空间。

证明 设 $V_1, \dots, V_n$ 都是 V 的子空间，记 $S = V_1 \cap \cdots \cap V_n$。我们关于 n 使用数学归纳法。

第 1 步

当 $n = 1$ 时，$S = V_1$，显然是 V 的子空间。

第 k 步

假设当 $n = k - 1$ 时，结论成立，即 $V_1 \cap \cdots \cap V_{k-1}$ 是 V 的子空间。又因为 V_k 是 V 的子空间，由习题 10 可知，$(V_1 \cap \cdots \cap V_{k-1}) \cap V_k$ 也是 V 的子空间。由此，我们证明了当 $n = k$ 时，结论也成立。

综上所述，V 的任意一族子空间的交集是 V 的子空间。■

习题 12 证明：V 的两个子空间的并集是 V 的子空间，当且仅当其中一个子空间是另一个的子集。

证明 设 V_1 和 V_2 都是 V 的子空间。我们首先说明充分性。不妨设 $V_1 \subseteq V_2$，则 $V_1 \cup V_2 = V_2$ 是 V 的子空间。

下面说明必要性。使用反证法，假设 $V_1 \cup V_2$ 是 V 的子空间，以及 $V_1 \not\subseteq V_2$ 且 $V_2 \not\subseteq V_1$。则可以找到 $v_1, v_2 \in V$，使得 $v_1 \in V_1$ 且 $v_1 \notin V_2$，以及 $v_2 \in V_2$ 且 $v_2 \notin V_1$。

令 $u = v_1 + v_2$。由于 $v_1, v_2 \in V_1 \cup V_2$，因此 $u \in V_1 \cup V_2$。不妨设 $u \in V_1$，则 $v_2 = u - v_1 \in V_1$，矛盾，故假设不成立。

综上所述，V 的两个子空间的并集是 V 的子空间，当且仅当其中一个子空间是另一个的子集。■

习题 13 证明：V 的三个子空间的并集是 V 的子空间，当且仅当其中一个包含另外两个。

注 令人惊讶的是，这道习题比习题 12 难不少，也许是因为如果我们把 $\mathbb{F}$ 换成只包含两个元素的域，这道习题的结论就不成立了。

证明 设 V_1, V_2, V_3 都是 V 的子空间。我们首先说明充分性。不妨设 $V_1 \subseteq V_3$ 且 $V_2 \subseteq V_3$，则 $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = V_3$ 是 V 的子空间。

下面说明必要性。使用反证法，假设 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 是 V 的子空间，以及任意一个 V_j 都不包含另外两个。

我们首先说明，任意一个 V_j 都不是另外两个的并集的子集。否则，不妨设 $V_1 \subseteq V_2 \cup V_3$，则 $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = V_2 \cup V_3$ 是 V 的子空间。应用习题 12，可以推出 $V_2 \subseteq V_3$ 或 $V_3 \subseteq V_2$，这说明 V_2 或 V_3 包含另外两个，矛盾，故假设不成立。因此，

$$V_1 \not\subseteq V_2 \cup V_3 \qquad \wedge \qquad V_2 \cup V_3 \not\subseteq V_1$$

所以可以找到 $u, v \in V$ 使得 $u \in V_1$ 且 $u \notin V_2 \cup V_3$，以及 $v \in V_2 \cup V_3$ 且 $v \notin V_1$。由于 V_1，V_2 和 V_3 都包含 0，因此 $u \neq 0$ 且 $v \neq 0$。我们取集合 $v + \operatorname{span}(u)$[注1]，

$$v + \operatorname{span}(u) = \{v + \lambda u : \lambda \in \mathbb{F}\}$$

下面我们说明 $V_1 \cap (v + \operatorname{span}(u)) = \varnothing$。使用反证法，假设存在 $w = v + k_1 u \in V_1$，则 $v = w - k_1 u$。又因为 $w \in V_1$ 且 $u \in V_1$，因此 $v \in V_1$，矛盾，故假设不成立，即 $V_1 \cap (v + \operatorname{span}(u)) = \varnothing$。

根据反证假设 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 是向量空间，因此 $v + \operatorname{span}(u) \subseteq V_1 \cup V_2 \cup V_3$。又因为 $V_1 \cap (v + \operatorname{span}(u)) = \varnothing$，所以

$$v + \operatorname{span}(u) \subseteq V_2 \cup V_3$$

现在，我们说明 $v + \operatorname{span}(u)$ 中包含至少 3 个元素。我们取函数

$$\begin{aligned} f : \mathbb{F} &\to v + \operatorname{span}(u) \\ x &\mapsto v + xu \end{aligned}$$

对于任意的 $x_1, x_2 \in \mathbb{F}$，我们有

$$f(x_1) - f(x_2) = (v + x_1 u) - (v + x_2 u) = (x_1 - x_2)u$$

由于 $u \neq 0$，因此 $f(x_1) = f(x_2)$ 当且仅当 $x_1 = x_2$。这说明 f 是单射，即 $v + \operatorname{span}(u)$ 至少和 $\mathbb{F}$ 一样大，因此 $v + \operatorname{span}(u)$ 至少包含 3 个元素。

根据抽屉原理[注2]，在 V_2 与 V_3 中至少有一个包含 $v + \operatorname{span}(u)$ 中的两个元素。不妨设 V_2 包含 $v + \operatorname{span}(u)$ 中的两个元素 $w_1 = v + \mu_1 u$ 和 $w_2 = v + \mu_2 u$，其中 $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{F}$ 且 $\mu_1 \neq \mu_2$。由于 V_2 是向量空间，故

$$w_1 - w_2 = (v + \mu_1 u) - (v + \mu_2 u) = (\mu_1 - \mu_2)u \in V_2$$

由于 $\mu_1 \neq \mu_2$，我们立即得到 $u \in V_2$，而这与 $u \notin V_2 \cup V_3$ 矛盾，故假设不成立。

综上所述，V 的三个子空间的并集是 V 的子空间，当且仅当其中一个包含另外两个。■

[注1]记号 span 在后续的 2A 节中由原书 2.19 定义，而记号 $v + V$ 表示平移，由后续 3E 节原书 3.97 定义。但是这里无需明白这些定义，将其当作一个集合的名字即可。

[注2]抽屉原理的一种通俗的说法是：若将 n 个物品放在 r 个盒子里，$r < n$，那么至少有一个盒子包含多于一个物品。在这里，相当于是将 $v + \operatorname{span}(u)$ 中的大于等于 3 个物品放入 V_2 和 V_3 两个盒子中。

习题 14 令

$$U=\{(x,-x,2x)\in\mathbb{F}^3:x\in\mathbb{F}\}\quad 与\quad W=\{(x,x,2x)\in\mathbb{F}^3:x\in\mathbb{F}\}$$

用符号描述 $U+W$，并给出不使用符号的描述。

解释 我们声称

$$S=\{(x,y,2x)\in\mathbb{F}^3:x,y\in\mathbb{F}^3\}=U+W$$

为了证明这一点，我们将论证 $S\subseteq U+W$ 以及 $U+W\subseteq S$。现在设 $u=(a,b,2a)$，其中 $a,b\in\mathbb{F}$，即 $u\in S$。注意到 $u=v_1+v_2$，其中

$$v_1=\left(\frac{a-b}{2},-\frac{a-b}{2},a-b\right)\in U$$

$$v_2=\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},a+b\right)\in W$$

故 $u\in U+W$，这表明 $S\subseteq U+W$。另一方面，设 $u=(a+b,-a+b,2a+2b)$，其中 $a,b\in\mathbb{F}$，即 $u\in U+W$。注意到 $u=(x,y,2x)$，其中

$$\begin{cases}x=a+b\\y=-a+b\end{cases}$$

这表明 $u\in S$，即 $U+W\subseteq S$。综上所述，$S=U+W$。

不使用符号的描述: $U+W$ 是 $\mathbb{F}^3$ 中第三个分量是第一个分量的两倍的所有元素构成的集合。

习题 15 设 U 是 V 的子空间，那么 $U+U$ 是什么?

解答 由子空间加法封闭性可知，$U+U\subseteq U$，另一方面，对于 $u\in U$，我们有 $u+0=u$，因此 $U\subseteq U+U$。综上所述，$U+U=U$。

习题 16 V 的“子空间求和”运算可交换吗? 换句话说，设 U 和 W 都是 V 的子空间，那么 $U+W=W+U$ 是否成立?

解答 是的。我们有

$$U+W=\{u+w:u\in U,w\in W\}=\{w+u:u\in U,w\in W\}=W+U$$

这说明 $U+W=W+U$ 成立。

习题 17 V 的“子空间求和”运算可结合吗? 换句话说，设 V_1,V_2,V_3 都是 V 的子空间，那么 $(V_1+V_2)+V_3=V_1+(V_2+V_3)$ 是否成立?

解答 是的。我们有

$$
\begin{aligned}
(V_1+V_2)+V_3 &= \{u+w : u \in V_1+V_2, w \in V_3\} \\
&= \{u+w : u \in \{v_1+v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}, w \in V_3\} \\
&= \{v_1+v_2+w : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, w \in V_3\} \\
&= V_1+(V_2+V_3)
\end{aligned}
$$

这说明 $(V_1+V_2)+V_3 = V_1+(V_2+V_3)$ 成立。

习题 18 V 的“子空间求和”运算有没有加法单位元？哪些子空间有加法逆元？

解答 “子空间求和”运算的加法单位元是 $\{0\}$。设 U 是 V 的子空间，对于任意 $u \in U$,都有 $u+0=u$，故 $U+\{0\}=U$。

由于 $\{0\}+\{0\}=\{0\}$，故 $\{0\}$ 有加法逆元 $\{0\}$。我们下面说明，除此之外，没有任何子空间有加法逆元。使用反证法，假设 U 是 V 的子空间，满足 $U \neq \{0\}$ 且 W 是 U 的加法逆元，注意到 $U \subseteq U+W=\{0\}$，矛盾，故假设不成立。

综上所述，“子空间求和”运算的加法单位元是 $\{0\}$，而只有 $\{0\}$ 有加法逆元。

习题 19 证明或证伪：如果 V_1，V_2，U 都是 V 的子空间，且

$$V_1+U=V_2+U$$

则有 $V_1=V_2$。

解答 令

$$
\begin{aligned}
V &= \mathbb{R}^3 \\
U &= \big\{(0,x,y) \in \mathbb{R}^3 : x,y \in \mathbb{R}\big\} \\
V_1 &= \{0\} \\
V_2 &= \big\{(0,x,0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\big\}
\end{aligned}
$$

注意到 $V_1+U=U=V_2+U$，但 $V_1 \neq V_2$。

该反例说明，题目中的命题不成立。

习题 20 令

$$U=\big\{(x,x,y,y) \in \mathbb{F}^4 : x,y \in \mathbb{F}\big\}$$

求 $\mathbb{F}^4$ 的一个子空间 W，使得 $\mathbb{F}^4=U \oplus W$。

解答 取

$$W=\big\{(x,0,y,0) \in \mathbb{F}^4 : x,y \in \mathbb{F}\big\}$$

我们首先证明 $\mathbb{F}^4 = U + W$。任取 $u = (a,b,c,d) \in \mathbb{F}^4$，注意到 $u = v_1 + v_2$，其中，

$$v_1 = (b,b,d,d) \in U$$
$$v_2 = (a-b,0,c-d,0) \in W$$

进一步地，我们说明这个和是直和。根据两个子空间的直和的条件（原书 1.46），我们只需说明 $U \cap W = \{0\}$。设 $v \in U \cap W$，那么存在 $a,b,c,d \in \mathbb{F}$，使得

$$(a,a,b,b) = v = (c,0,d,0)$$

解得 $a = b = c = d = 0$，故 $U \cap W = \{0\}$。

综上所述，$\mathbb{F}^4 = U \oplus W$。

注 W 还有其他符合题意的构造方案，例如 $W = \{(0,x,0,y) \in \mathbb{F}^4 : x,y \in \mathbb{F}\}$。

习题 21 令

$$U = \{(x,y,x+y,x-y,2x) \in \mathbb{F}^5 : x,y \in \mathbb{F}\}$$

求 $\mathbb{F}^5$ 的一个子空间 W，使得 $\mathbb{F}^5 = U \oplus W$。

解答 取

$$W = \{(x,y,z,0,0) \in \mathbb{F}^5 : x,y,z \in \mathbb{F}\}$$

我们首先说明，$\mathbb{F}^5 = U + W$。任取 $u = (a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{F}^5$，注意到 $u = w + v$，其中

$$w = \left(\frac{e}{2}, -d+\frac{e}{2}, -d+e, d, e\right)$$
$$v = \left(a-\frac{e}{2}, b+d-\frac{e}{2}, c+d-e, 0, 0\right)$$

进一步地，我们说明这个和是直和。我们将 0 分解为两个向量的和，使得每个向量都来自于一个子空间。具体地，我们设

$$0 = (a,b,a+b,a-b,2a) + (c,d,e,0,0)$$

其中 $a,b,c,d,e \in \mathbb{F}$。这给出一个五元一次方程组

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+d=0 \\ a+b+e=0 \\ a-b=0 \\ 2a=0 \end{cases}$$

这个方程组的唯一解是 $a = b = c = d = e = 0$，这说明 0 只有唯一的表示方式。根据直和的条件（原书 1.45），我们确认 $\mathbb{F}^5 = U \oplus W$。

习题 22 令

$$U=\{(x,y,x+y,x-y,2x)\in\mathbb{F}^5 : x,y\in\mathbb{F}\}$$

求 $\mathbb{F}^5$ 的三个都不为 $\{0\}$ 的子空间 W_1，W_2 和 W_3，使得 $\mathbb{F}^5=U\oplus W_1\oplus W_2\oplus W_3$。

解答 对于 $i\in\{1,2,3\}$，取

$$\begin{aligned}W_1&=\{(x,0,0,0,0)\in\mathbb{F}^5 : x\in\mathbb{F}\}\\W_2&=\{(0,x,0,0,0)\in\mathbb{F}^5 : x\in\mathbb{F}\}\\W_3&=\{(0,0,x,0,0)\in\mathbb{F}^5 : x\in\mathbb{F}\}\end{aligned}$$

我们首先说明，$\mathbb{F}^5=U+W_1+W_2+W_3$。任取 $u=(a,b,c,d,e,f)\in\mathbb{F}^5$，注意到 $u=w+v_1+v_2+v_3$，其中

$$\begin{aligned}w&=\left(\frac{e}{2},-d+\frac{e}{2},-d+e,d,e\right)\\v_1&=\left(a-\frac{e}{2},0,0,0,0\right)\\v_2&=\left(0,b+d-\frac{e}{2},0,0,0\right)\\v_3&=(0,0,c+d-e,0,0)\end{aligned}$$

进一步地，我们说明这个和是直和。我们将 0 分解为四个向量的和，使得每个向量都来自于一个子空间。具体地，我们设

$$0=(a,b,a+b,a-b,2a)+(c,0,0,0,0)+(0,d,0,0,0)+(0,0,e,0,0)$$

其中 $a,b,c,d,e\in\mathbb{F}$。这给出一个五元一次方程组

$$\begin{cases}a+c=0\\b+d=0\\a+b+e=0\\a-b=0\\2a=0\end{cases}$$

这个方程组的唯一解是 $a=b=c=d=e=0$，这说明 0 只有唯一的表示方式。根据直和的条件（原书 1.45），我们确认 $\mathbb{F}^5=U\oplus W_1\oplus W_2\oplus W_3$。

习题 23 证明或证伪：如果 V_1，V_2，U 都是 V 的子空间，且

$$V=V_1\oplus U \qquad \wedge \qquad V=V_2\oplus U$$

则有 $V_1=V_2$。

提示 在尝试确认线性代数中的一个命题是否成立时，先在 $\mathbb{F}^2$ 中试试，通常时很有帮助的。

解答 令

$$\begin{aligned}V &= \mathbb{F}^2\\ U &= \left\{(0,x)\in\mathbb{F}^2 : x\in\mathbb{F}\right\}\\ V_1 &= \left\{(x,0)\in\mathbb{F}^2 : x\in\mathbb{F}\right\}\\ V_2 &= \left\{(x,x)\in\mathbb{F}^2 : x\in\mathbb{F}\right\}\end{aligned}$$

容易验证，$V = V_1 \oplus U$ 且 $V = V_2 \oplus U$，但 $V_1 \neq V_2$。

该反例说明，题目中的命题不成立。

习题 24 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 被成为**偶的（even）**，是指

$$f(-x) = f(x)$$

对所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立。函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 被成为**奇的（odd）**，是指

$$f(-x) = -f(x)$$

对所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立。令 V_e 代表 $\mathbb{R}$ 上的实值偶函数构成的集合，V_o 代表 $\mathbb{R}$ 上的实值奇函数构成的集合。证明：$\mathbb{R}^\mathbb{R} = V_\mathrm{e} + V_\mathrm{o}$。

证明 我们首先说明 $\mathbb{R}^\mathbb{R} = V_\mathrm{e} + V_\mathrm{o}$。任意一个函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 都可以写成 $f = f_\mathrm{e} + f_\mathrm{o}$，其中

$$\begin{aligned}f_\mathrm{e}(x) &= \frac{1}{2}(f(x)+f(-x))\\ f_\mathrm{o}(x) &= \frac{1}{2}(f(x)-f(-x))\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}f_\mathrm{e}(-x) &= \frac{1}{2}(f(-x)+f(x)) = f_\mathrm{e}(x)\\ f_\mathrm{o}(-x) &= \frac{1}{2}(f(-x)-f(x)) = f_\mathrm{o}(x)\end{aligned}$$

因此 $f_\mathrm{e}\in V_\mathrm{e}$ 且 $f_\mathrm{o}\in V_\mathrm{o}$。这说明 $f = f_\mathrm{e}+f_\mathrm{o}\in V_\mathrm{e}+V_\mathrm{o}$，即 $\mathbb{R}^\mathbb{R} = V_\mathrm{e} + V_\mathrm{o}$。

下面说明 $V_\mathrm{e}\cap V_\mathrm{o} = \{0\}$。设 $f\in V_\mathrm{e}\cap V_\mathrm{o}$，则 f 是偶函数且奇函数。我们有

$$f(-x) = f(x) \qquad \wedge \qquad f(-x) = -f(x)$$

这说明 $f(x) = -f(x)$ 对所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立，因此 $f(x)=0$ 对所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立，即 $f = 0$。因此 $V_\mathrm{e}\cap V_\mathrm{o} = \{0\}$。

根据两个子空间的直和的条件（原书 1.46），我们确认 $\mathbb{R}^\mathbb{R} = V_\mathrm{e}\oplus V_\mathrm{o}$。 ■

第 2 章 有限维向量空间

2A 张成空间和线性无关性

习题 1 求 $\mathbb{F}^3$ 中的四个不同的向量，其张成空间为

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{F}^3 : x+y+z=0\}$$

解答 取 $u=(1,0,-1)$，$v=(0,1,-1)$。根据张成空间的定义，

$$\operatorname{span}(u,v)=\{(x,y,-x-y)\in\mathbb{F}^3 : x,y\in\mathbb{F}\}$$

这已经是题目所要求的张成空间了。为了补足四个不同的向量，我们可以取 $w_1=2u$，$w_2=2v$。

综上所述，题目要求的四个不同的向量可以是

$$(1,0,-1),(0,1,-1),(2,0,-2),(0,2,-2)$$

习题 2 证明或证伪：如果向量组 v_1,v_2,v_3,v_4 张成 V，那么向量组

$$v_1-v_2,v_2-v_3,v_3-v_4,v_4$$

也张成 V。

证明 对于任意 $v\in V$，可以将其表示为

$$v=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4$$

其中 $a_i\in\mathbb{F}$。我们可以将其改写为

$$v=a_1(v_1-v_2)+(a_1+a_2)(v_2-v_3)+(a_2+a_3)(v_3-v_4)+(a_3+a_4)v_4$$

这说明 v 可以用 v_1-v_2，v_2-v_3，v_3-v_4 和 v_4 线性表示，这表明 $V\subseteq\operatorname{span}(v_1-v_2,v_2-v_3,v_3-v_4,v_4)$。

另一方面，设 $v\in\operatorname{span}(v_1-v_2,v_2-v_3,v_3-v_4,v_4)$，则 v 可以表示为

$$v=b_1(v_1-v_2)+b_2(v_2-v_3)+b_3(v_3-v_4)+b_4v_4$$

其中 $b_i\in\mathbb{F}$。我们可以将其改写为

$$v=(b_1+b_2)v_1+(b_2+b_3)v_2+(b_3+b_4)v_3+b_4v_4$$

这说明 v 可以用 v_1，v_2，v_3 和 v_4 线性表示，这表明 $\operatorname{span}(v_1-v_2,v_2-v_3,v_3-v_4,v_4)\subseteq V$。

综上所述，$V=\operatorname{span}(v_1-v_2,v_2-v_3,v_3-v_4,v_4)$，即向量组 $v_1-v_2,v_2-v_3,v_3-v_4,v_4$ 也张成 V。■

习题 3 设 $v_1,\ldots,v_m$ 是 V 中的一组向量。对于 $k\in\{1,\ldots,m\}$，令

$$w_k=v_1+\cdots+v_k$$

证明：$\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_m)=\operatorname{span}(w_1,\ldots,w_m)$。

证明 设 $u\in\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_m)$，则 u 可以表示为

$$u=a_1v_1+\cdots+a_mv_m$$

其中 $a_i\in\mathbb{F}$。我们可以将其改写为

$$u=b_1w_1+\cdots+b_mw_m$$

其中对于 $k\in\{1,\ldots,m\}$，$b_k=a_k-a_{k+1}$（方便起见，我们设 $a_{m+1}=0$。为了验证这一点，我们带入 b_i 和 w_i 的定义，得到

$$\begin{aligned}
b_1w_1+\cdots+b_mw_m&=\sum_{i=1}^{m}(a_i-a_{i+1})\sum_{j=1}^{i}v_j\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i}(a_i-a_{i+1})v_j\\
&=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=j}^{m}(a_i-a_{i+1})v_j\\
&=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=j}^{m}a_i-\sum_{i=j}^{m}a_{i+1}\right)v_j\\
&=\sum_{j=1}^{m}a_jv_j=u
\end{aligned}$$

这说明 u 可以用 $w_1,\ldots,w_m$ 线性表示，因此 $\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_m)\subseteq\operatorname{span}(w_1,\ldots,w_m)$。另一方面，设 $u\in\operatorname{span}(w_1,\ldots,w_m)$，则 u 可以表示为

$$u=a_1w_1+\cdots+a_mw_m$$

其中 $a_i\in\mathbb{F}$。我们可以将其改写为

$$u=b_1v_1+\cdots+b_mv_m$$

其中对于 $k\in\{1,\ldots,m\}$，$b_k=a_k+\cdots+a_m$。为了验证这一点，我们带入 b_i 和 w_i 的定义，得到

$$\begin{aligned}
b_1v_1+\cdots+b_mv_m &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=i}^{m}a_j\right)v_i \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i}^{m}a_jv_i \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{j}a_jv_i \\
&= \sum_{j=1}^{m}a_j\sum_{i=1}^{j}v_i \\
&= \sum_{j=1}^{m}a_jw_j = u
\end{aligned}$$

这说明 u 可以用 $v_1,\dots,v_m$ 线性表示，因此 $\mathrm{span}(w_1,\dots,w_m)\subseteq\mathrm{span}(v_1,\dots,v_m)$。

综上所述，$\mathrm{span}(v_1,\dots,v_m)=\mathrm{span}(w_1,\dots,w_m)$。■

习题 4

(a) 证明：向量空间中长度为 1 的组线性无关，当且仅当组中的该向量不是 0；

(b) 证明：向量空间中长度为 2 的组线性无关，当且仅当组中两个向量的任意一个不是另一个的标量倍。

证明 设 V 是向量空间。对于第一个命题，设 $v\in V$。首先说明充分性。假设 $v\neq 0$，根据 1B 节习题 2（见第 7 页），使得 $av=0$ 成立的 $a\in\mathbb{F}$ 的唯一选取方式是 $a=0$，根据线性无关的定义（原书 2.15），这表明向量组 v 是线性无关的。

然后说明必要性，如果 $v=0$，则我们有

$$0v=1v=0$$

根据线性无关的定义（原书 2.15），向量组 0 不是线性无关的。

对于第二个命题，设 $v_1,v_2\in V$。首先说明充分性：使用反证法，假设 v_1 和 v_2 不是线性无关的，即存在 $a_1,a_2\in\mathbb{F}$，使得

$$a_1v_1+a_2v_2=0$$

其中 a_1 和 a_2 中至少有一个向量不为 0。不妨设 $a_1\neq 0$，那么，可以整理得

$$v_1=-\frac{a_2}{a_1}v_2$$

这表明 v_1 是 v_2 的标量倍，与题目条件矛盾。这说明，v_1 和 v_2 线性无关。

然后说明必要性：假设 v_1 和 v_2 线性无关，使用反证法，假设 v_1 和 v_2 中有一个向量是另一个向量的标量倍，不妨设 $v_1=kv_2$，其中 $k\in\mathbb{F}$。注意到，

$$v_1+(-k)v_2=0$$

这与线性无关的定义矛盾。因此，v_1 和 v_2 线性无关当且仅当组中两个向量的任意一个不是另一个的标量倍。■

习题 5 求一数 $t \in \mathbb{R}$，使得向量组

$$(3,1,4),(2,-3,5),(5,9,t)$$

在 $\mathbb{R}^3$ 中不是线性无关的。

解答 $t=2$。为了说明这一点，注意到，

$$(-3)(3,1,4)+2(2,-3,5)+1(5,9,2)=0$$

根据线性无关的定义（原书 2.15），这表明向量组 $(3,1,4),(2,-3,5),(5,9,2)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中不是线性无关的。

习题 6 证明：向量组

$$(2,3,1),(1,-1,2),(7,3,c)$$

在 $\mathbb{F}^3$ 中线性相关，当且仅当 $c=8$。

证明 首先说明充分性：当 $c=8$ 时，注意到

$$16(2,3,1)+1(1,-1,2)+(-5)(7,3,8)=0$$

根据线性相关的定义（原书 2.17），这表明向量组 $(2,3,1)$，$(1,-1,2)$，$(7,3,8)$ 在 $\mathbb{F}^3$ 中线性相关。

然后说明必要性：使用反证法，假设 $c\neq 8$ 且向量组 $(2,3,1),(1,-1,2),(7,3,c)$ 线性相关。根据定义，存在 $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$，使得

$$a_1(2,3,1)+a_2(1,-1,2)+a_3(7,3,c)=0$$

其中 $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$ 中至少有一个不为 0。将其展开，得到下面方程组

$$\begin{cases} 2a_1+a_2+7a_3=0\\ 3a_1-a_2+3a_3=0\\ a_1+2a_2+ca_3=0\end{cases}$$

由前两个方程，我们可以得到 $a_2=\frac{3}{2}a_1$ 且 $a_3=-\frac{1}{2}a_1$，代入第三个方程中，化简得

$$(c-8)a_1=0$$

由于 $c\neq 8$，只能有 $a_1=0$，而这将给出 $a_1=a_2=a_3=0$，与反证假设矛盾，故假设不成立。

综上所述，向量组 $(2,3,1),(1,-1,2),(7,3,c)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中线性相关当且仅当 $c=8$。■

习题 7

(a) 证明：如果我们将 $\mathbb{C}$ 视为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间，那么向量组 $1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}$ 是线性无关的；

(b) 证明：如果我们将 $\mathbb{C}$ 视为 $\mathbb{C}$ 上的向量空间，那么向量组 $1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}$ 是线性相关的。

证明 利用习题 4 中的结论，我们只需注意到，

$$\frac{1+i}{1-i} = \mathrm{i}$$

考虑到 $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ 但是 $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$，因此 $1+i$ 只在 $\mathbb{C}$ 上是 $1-\mathrm{i}$ 的标量倍。这表明，如果我们将 $\mathbb{C}$ 视为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间，那么向量组 $1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}$ 是线性无关的，而如果我们将 $\mathbb{C}$ 视为 $\mathbb{C}$ 上的向量空间，那么向量组 $1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}$ 是线性相关的。■

习题 8 设 v_1, v_2, v_3, v_4 是 V 中的线性无关向量组。证明：向量组

$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$$

也线性无关。

证明 设 $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{F}$，使得

$$a_1(v_1 - v_2) + a_2(v_2 - v_3) + a_3(v_3 - v_4) + a_4 v_4 = 0$$

整理得到

$$a_1 v_1 + (a_2 - a_1)v_2 + (a_3 - a_2)v_3 + (a_4 - a_3)v_4 = 0$$

由于 v_1, v_2, v_3, v_4 线性无关，根据线性无关的定义（原书 2.15），只能有

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 - a_1 = 0 \\ a_3 - a_2 = 0 \\ a_4 - a_3 = 0 \end{cases}$$

这说明 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$。因此，根据线性无关的定义（原书 2.15），向量组 $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$ 线性无关。■

习题 9 证明或证伪：设 $v_1, \dots, v_m$ 与 V 中的线性无关向量组，则向量组

$$5v_1 - 4v_2, v_2, v_3, \dots, v_m$$

也线性无关。

证明 设 $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$，使得

$$a_1(5v_1 - 4v_2) + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m = 0$$

整理得到

$$5a_1v_1 + (a_2 - 4a_1) + a_3v_3 + a_4v_4 + \cdots + a_mv_m = 0$$

由于 $v_1, ..., v_m$ 线性无关，根据线性无关的定义（原书 2.15），只能有

$$\begin{cases} 5a_1 = 0 \\ a_2 - 4a_1 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \\ \cdots \\ a_m = 0 \end{cases}$$

这说明 $a_1 = \cdots = a_m = 0$。因此，根据线性无关的定义（原书 2.15），向量组 $5v_1 - 4v_2, v_2, v_3, ..., v_m$ 线性无关。■

习题 10 证明或证伪：设 $v_1, ..., v_m$ 是 V 中的线性无关向量组，$\lambda \in \mathbb{F}$（$\lambda \neq 0$）。则向量组

$$\lambda v_1, ..., \lambda v_m$$

也线性无关。

证明 设 $a_1, ..., a_m \in \mathbb{F}$，使得

$$a_1(\lambda v_1) + \cdots + a_m(\lambda v_m) = 0$$

整理得到

$$\lambda(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) = 0$$

由于 $\lambda \neq 0$，因此 $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = 0$。由于 $v_1, ..., v_m$ 线性无关，根据线性无关的定义（原书 2.15），只能有 $a_1 = \cdots = a_m = 0$。因此，根据线性无关的定义（原书 2.15），向量组 $\lambda v_1, ..., \lambda v_m$ 线性无关。■

习题 11 证明或证伪：设 $v_1, ...v_m$ 和 $w_1, ..., w_m$ 都是 V 中的线性无关向量组。则向量组

$$v_1 + w_1, ..., v_m + w_m$$

也线性无关。

解答 取 $V = \mathbb{R}^2$，并令

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0), & v_2 &= (0, 1) \\ w_1 &= (0, 1), & w_2 &= (1, 0) \end{aligned}$$

容易验证这两个向量组都是 $\mathbb{R}^2$ 中的线性无关向量组。然而，注意到

$$1(v_1+w_1)+(-1)(v_2+w_2)=1(1,1)+(-1)(1,1)=0$$

根据线性无关的定义（原书 2.15），这表明向量组 v_1+w_1, v_2+w_2 不是线性无关的，因此原命题不成立。

习题 12 设 $v_1, \ldots, v_m$ 是 V 中的线性无关向量组，且 $w \in V$。证明：若向量组

$$v_1+w, \ldots, v_m+w$$

线性相关，则 $w \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$。

证明 由于向量组 $v_1+w, \ldots, v_m+w$ 线性相关，根据线性相关的定义（原书 2.17），存在 $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$，使得

$$a_1(v_1+w)+\cdots+a_m(v_m+w)=0 \qquad \text{（式 1）}$$

其中 $a_1, \ldots, a_m$ 中至少有一个不为 0。

下面我们说明 $a_1+\cdots+a_m \neq 0$。整理式 1 可得

$$a_1v_1+\cdots+a_mv_m+(a_1+\cdots+a_m)w=0$$

反证假设 $a_1+\cdots+a_m=0$，则 $a_1v_1+\cdots+a_mv_m=0$，而这与线性无关的定义（原书 2.15）矛盾。因此，我们只能有 $a_1+\cdots+a_m \neq 0$。

所以，我们可以将式 1 改写为

$$w=-\frac{a_1v_1+\cdots+a_mv_m}{a_1+\cdots+a_m}$$

更进一步地，对于 $k \in \{1, \ldots, m\}$，令

$$b_k=-\frac{a_k}{a_1+\cdots+a_m}$$

则有

$$w=b_1v_1+\cdots+b_mv_m$$

根据张成空间的定义（原书 2.4），这表明 $w \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$。■

习题 13 设 $v_1, \ldots, v_m$ 是 V 中的线性无关向量组，且 $w \in V$。证明：

$$v_1, \ldots, v_m, w \text{ 线性无关} \iff w \notin \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$$

证明 首先说明充分性：现在 $v_1, \ldots, v_m, w$ 线性无关。反证假设 $w \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$，则根据张成空间的定义（原书 2.4），存在 $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$，使得

$$w=a_1v_1+\cdots+a_mv_m$$

整理得到

$$a_1v_1+\cdots+a_mv_m+(-1)w=0$$

根据线性无关的定义（原书 2.15），这与 $v_1,\ldots,v_m,w$ 线性无关矛盾，因此，$w\notin \operatorname{span}(v_1,\ldots,v_m)$。

然后说明必要性：现在 $w\notin \operatorname{span}(v_1,\ldots,v_m)$。反证假设 $v_1,\ldots,v_m,w$ 线性相关。根据线性相关的定义（原书 2.17），存在 $a_1,\ldots,a_{m+1}\in\mathbb{F}$，使得

$$a_1v_1+\cdots+a_mv_m+a_{m+1}w=0 \tag{式 1}$$

其中 $a_1,\ldots,a_{m+1}$ 中至少有一个不为 0。我们有 $a_{m+1}\neq 0$。这是因为，如果 $a_{m+1}=0$，则我们可以将式 1 改写为

$$a_1v_1+\cdots+a_mv_m=0$$

这与题目条件中 $v_1,\ldots,v_m$ 线性无关矛盾。因此，$a_{m+1}\neq 0$。

所以，我们可以将式 1 改写为

$$w=-\frac{a_1v_1+\cdots+a_mv_m}{a_{m+1}}$$

更进一步地，对于 $k\in\{1,\ldots,m\}$，令

$$b_k=-\frac{a_k}{a_{m+1}}$$

则有

$$w=b_1v_1+\cdots+b_mv_m$$

这表明 $w\in\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_m)$，与反证假设 $w\notin\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_m)$ 矛盾。因此，$v_1,\ldots,v_m,w$ 线性无关。

综上所述，$v_1,\ldots,v_m,w$ 线性无关当且仅当 $w\notin\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_m)$。 ■

习题 14 设 $v_1,\ldots,v_m$ 是 V 中的向量组。对于 $k\in\{1,\ldots,m\}$，令

$$w_k=v_1+\cdots+v_k$$

证明：如果向量组 $v_1,\ldots,v_m$ 线性无关，当且仅当向量组 $w_1,\ldots,w_m$ 线性无关。

证明 首先说明充分性：现在 $w_1,\ldots,w_m$ 线性无关。设 $a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{F}$ 使得

$$a_1v_1+\cdots+a_mv_m=0$$

我们可以将其改写为

$$b_1w_1+\cdots+b_mw_m=0$$

其中对于 $k\in\{1,\ldots,m\}$，$b_k=a_k-a_{k+1}$（方便起见，我们令 $a_{m+1}=0$）。为了验证这一点，我们带入 b_i 和 w_i 的定义，得到

$$\begin{aligned}
b_1w_1+\cdots+b_mw_m &= \sum_{i=1}^{m}(a_i-a_{i+1})\sum_{j=1}^{i}v_j \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i}(a_i-a_{i+1})v_j \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=j}^{m}(a_i-a_{i+1})v_j \\
&= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=j}^{m}a_i-\sum_{i=j}^{m}a_{i+1}\right)v_j \\
&= \sum_{j=1}^{m}a_jv_j=0
\end{aligned}$$

这说明 $b_1=\cdots=b_m=0$，也即

$$\begin{cases}
a_1-a_2=0 \\
\cdots \\
a_{m-1}-a_m=0 \\
a_m=0
\end{cases}$$

这解得 $a_1=\cdots=a_m=0$，于是根据线性无关的定义（原书 2.15），向量组 $v_1,\dots,v_m$ 线性无关。

然后说明必要性：现在 $v_1,\dots,v_m$ 线性无关。设 $a_1,\dots,a_m\in\mathbb{F}$ 使得

$$a_1w_1+\cdots+a_mw_m=0$$

我们可以将其改写为

$$b_1v_1+\cdots+b_mv_m=0$$

其中对于 $k\in\{1,\dots,m\}$，$b_k=a_k+\cdots+a_m$。为了验证这一点，我们带入 b_i 和 w_i 的定义，得到

$$\begin{aligned}
b_1v_1+\cdots+b_mv_m &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=i}^{m}a_j\right)v_i \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i}^{m}a_jv_i \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{j}a_jv_i \\
&= \sum_{j=1}^{m}a_j\sum_{i=1}^{j}v_i \\
&= \sum_{j=1}^{m}a_jw_j=0
\end{aligned}$$

这说明 $b_1 = \cdots = b_m = 0$，也即

$$\begin{cases} a_1 + \cdots + a_m = 0 \\ a_2 + \cdots + a_m = 0 \\ \cdots \\ a_{m-1} + a_m = 0 \\ a_m = 0 \end{cases}$$

这解得 $a_1 = \cdots = a_m = 0$，于是根据线性无关的定义（原书 2.15），向量组 $w_1, \ldots, w_m$ 线性无关。

综上所述，向量组 $v_1, \ldots, v_m$ 线性无关当且仅当向量组 $w_1, \ldots, w_m$ 线性无关。■

习题 15 解释为什么在 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 上不存在由六个多项式组成的线性无关组。

解释 对于 $k \in \{0, \ldots, 4\}$，令

$$\begin{aligned} p_k : \mathbb{F} &\to \mathbb{F} \\ z &\mapsto z^k \end{aligned}$$

我们现在论证向量组 $p_0, \ldots, p_4$ 张成 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$：对于任意 $p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{F})$，设对于任意 $z \in \mathbb{F}$，$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$，则可以将其表示为

$$p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4$$

这说明 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = \operatorname{span}(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$。因此，根据“线性无关组的长度 $\leq$ 张成组的长度”（原书 2.22），我们可以得出结论，$\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 上的线性无关组的长度不能超过 5。

所以，在 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 上不存在由六个多项式组成的线性无关组。

习题 16 解释为什么由四个多项式构成的向量组不可能张成 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$。

解释 对于 $k \in \{0, \ldots, 4\}$，令

$$\begin{aligned} p_k : \mathbb{F} &\to \mathbb{F} \\ z &\mapsto z^k \end{aligned}$$

我们现在论证向量组 $p_0, \ldots, p_4$ 是线性无关的：设 $a_0, \ldots, a_4 \in \mathbb{F}$，满足

$$a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 = 0$$

即对于任意 $z \in \mathbb{F}$，有

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 = 0$$

分别取 $z \in \{0, \ldots, 4\}$，得到方程组

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 = 0 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 = 0 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 + 256a_4 = 0 \end{cases}$$

解得 $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$，因此向量组 $p_0, ..., p_4$ 是线性无关的。

因此，根据“线性无关组的长度 $\leq$ 张成组的长度”（原书 2.22），$\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 上的张成组的长度不少于 5。因此，由四个多项式构成的向量组不可能张成 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$。

习题 17 证明：V 是无限维的，当且仅当 V 中存在一个序列 $v_1, v_2, ...$ 使得对于任意正整数 m，均有向量组 $v_1, ..., v_m$ 线性无关。

证明 首先说明充分性：现在假设 V 中存在一个序列 $v_1, v_2, ...$ 使得对于任意正整数 m，均有向量组 $v_1, ..., v_m$ 线性无关。反证假设 V 是有限维的，即存在一个向量组 $u_1, ..., u_\ell$ 张成 V。根据“线性无关组的长度 $\leq$ 张成组的长度”（原书 2.22），必然有向量组 $v_1, ..., v_{\ell+1}$ 线性相关，这与条件矛盾。因此，V 是无限维的。

然后说明必要性：现在假设 V 是无限维的。我们现在构造题目所要求的序列 $v_1, v_2, ...$ 如下

第 1 步

任取 $v_1 \in V$，使得 $v_1 \neq 0$。根据习题 4 中的结论，向量组 v_1 是线性无关的。

第 k 步

由于 V 是无限维的，存在一个向量 $v_k \in V$，使得 $v_k \notin \operatorname{span}(v_1, ..., v_{k-1})$。根据习题 13 中的结论，向量组 $v_1, ..., v_k$ 线性无关。

所以，V 中存在一个序列 $v_1, v_2, ...$ 使得对于任意正整数 m，均有向量组 $v_1, ..., v_m$ 线性无关。必要性得证。

综上所述，V 是无限维的，当且仅当 V 中存在一个序列 $v_1, v_2, ...$ 使得对于任意正整数 m，均有向量组 $v_1, ..., v_m$ 线性无关。 ■

习题 18 证明：$\mathbb{F}^\infty$ 是无限维的。

证明 对于 $k \in \mathbb{N}^+$，我们令

$$v_k = (\underbrace{0, ..., 0}_{k-1\text{个}0}, 1, 0, ...)$$

其中 $v_k \in \mathbb{F}^\infty$。我们现在论证，对于任意正整数 m，向量组 $v_1, ..., v_m$ 是线性无关的。设 $a_1, ...a_m \in \mathbb{F}$，使得

$$a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0$$

这立即给出 $a_1 = \cdots = a_m = 0$，于是根据线性无关的定义（原书 2.15），向量组 $v_1, ..., v_m$ 是线性无关的。

所以，根据习题 17，$\mathbb{F}^\infty$ 是无限维的。■

习题 19 证明：由区间 $[0,1]$ 上的所有连续实值函数构成的 $\mathbb{R}$ 上的向量空间是无限维的。

证明 记 $\mathbb{R}^{[0,1]}_{\not\dashrightarrow}$ 为由区间 $[0,1]$ 上的所有连续实值函数构成的 $\mathbb{R}$ 上的向量空间。

对于 $k \in \mathbb{N}^+$，我们令函数

$$\begin{aligned} f_k : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \max\left\{0, \left(k^2 - k^4\right)x^2 + 2k^3x - k^2\right\} \end{aligned}$$

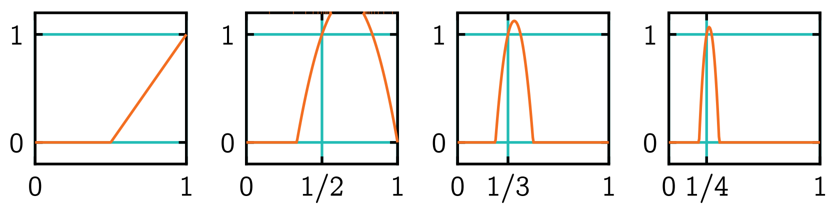

图 2 $k = 1, 2, 3, 4$ 时，f 的图像。

注意到，$f_k\left(\frac{1}{k}\right) = 1$。另一方面 f_k 定义中 max 运算内的二次函数恰在 $x = \frac{1}{k+1}$ 和 $x = \frac{1}{k-1}$（$k = 1$ 时除外）时值为 0。因此，$f_k \in \mathbb{R}^{[0,1]}_{\not\dashrightarrow}$。更进一步，我们得到，对于 $i, j \in \mathbb{N}^+$，

$$f_i\left(\frac{1}{j}\right) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

设 $a_1, ...a_m \in \mathbb{R}$，使得

$$a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m = 0$$

即对于任意 $x \in [0,1]$，有

$$a_1 f_1(x) + \cdots + a_m f_m(x) = 0$$

对于 $k \in \{1, ..., m\}$，我们代入 $x = \frac{1}{k}$ 即可说明 $a_k = 0$，于是根据线性无关的定义（原书 2.15），向量组 $f_1, ..., f_m$ 是线性无关的。

所以，根据习题 17，$\mathbb{R}^{[0,1]}_{\not\dashrightarrow}$ 是无限维的。■

习题 20 设 $p_0, ..., p_m$ 是 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 中的多项式，其满足对任意 $k \in \{0, ..., m\}$ 都有 $p_k(2) = 0$。证明：$p_0, ..., p_m$ 在 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 中不是线性无关的。

证明 对于 $k \in \{0, ..., m\}$，令

$$\begin{aligned} q_k : \mathbb{F} &\to \mathbb{F} \\ z &\mapsto z^k \end{aligned}$$

根据多项式的次数定义（原书 2.11），有

$$\mathcal{P}_m(\mathbb{F}) = \operatorname{span}(q_0, \ldots, q_m)$$

现在反证假设 $p_0, \ldots, p_m$ 在 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 中线性无关。令函数

$$\begin{aligned} \mathbf{1} : \mathbb{F} &\to \mathbb{F} \\ z &\mapsto 1 \end{aligned}$$

有 $\mathbf{1} \in \mathcal{P}_m(\mathbb{F})$。同时，注意到 $\mathbf{1}(2) \neq 0$，因此 $\mathbf{1} \notin \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$。根据习题 13，向量组 $p_0, \ldots, p_m, \mathbf{1}$ 线性无关。然而，根据“线性无关组的长度 $\leq$ 张成组的长度”（原书 2.22），$q_0, \ldots, q_m$ 这一张成向量组的长度为 $m+1$，而向量组 $p_0, \ldots, p_m, \mathbf{1}$ 的长度为 $m+2$，不可能是线性无关的。矛盾，故假设不成立。

综上所述，$p_0, \ldots, p_m$ 在 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 中不是线性无关的。■

2B 基

习题 1 求出所有恰好有一个基的向量空间。

解答 $\{0\}$ 是唯一满足要求的向量空间，它的基是空集。对于任何其他向量空间 V，不妨设其的一个基为 $v_1, \ldots, v_m$，则由基的判定准则（原书 2.28）可知，V 中的任意向量都 v 都可以唯一地表示为

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m$$

其中 $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$。现在取向量组 $2v_1, \ldots, 2v_m$，则 v，可以被表示为

$$v = b_1(2v_1) + \cdots + b_m(2v_m)$$

则对于 $k \in \{1, \ldots, m\}$，$a_k = 2b_k$。这只有唯一的解，即 $b_k = a_k/2$，因此 v 可以唯一地被向量组 $2v_1, \ldots, 2v_m$ 的线性组合表示，这表明向量组 $2v_1, \ldots, 2v_m$ 也是 V 的一个基。由此可知，V 中的任意向量都可以被表示为两个不同的基的线性组合，因此 V 不可能只有一个基。

综上所述，只有 $\{0\}$ 满足题目要求。

习题 2 验证下面这些的结论。

(a) 向量组 $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的基；
(b) 向量组 $(1, 2), (3, 5)$ 是 $\mathbb{F}^2$ 的基；
(c) 向量组 $(1, 2, -4), (7, -5, 6)$ 在 $\mathbb{F}^3$ 中是线性无关的，但不是 $\mathbb{F}^3$ 的基，因为它不张成 $\mathbb{F}^3$；
(d) 向量组 $(1, 2), (3, 5), (4, 13)$ 张成 $\mathbb{F}^2$，但不是 $\mathbb{F}^2$ 的基，因为它们是线性相关的；
(e) 向量组 $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$ 是 $\{(x, x, y) \in \mathbb{F}^3 : x, y \in \mathbb{F}\}$ 的基；
(f) 向量组 $(1, -1, 0), (1, 0, -1)$ 是 $\{(x, y, z) \in \mathbb{F}^3 : x + y + z = 0\}$ 的基；
(g) 向量组 $1, z, \ldots, z^m$ 是 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 的基。

说明 本题原文为"验证例 2.27 中的所有结论"。出于完整性考虑，这里将原书例 2.27 的所有结论摘录在上面。

证明 对于 (a)，记这些向量为 $v_1, \ldots, v_n$，设 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$，使得

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$$

这立即给出 $a_1 = \cdots = a_n = 0$，根据线性无关的定义（原书 2.15），可知向量组 $v_1, \ldots, v_n$ 是线性无关的。设 $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$，则

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

因此，$v_1, \ldots, v_n$ 张成 $\mathbb{F}^n$。根据基的定义（原书 2.26），可知向量组 $v_1, \ldots, v_n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的基。

对于 (b)，设 $a_1, a_2 \in \mathbb{F}$，$v = (x_1, x_2) \in \mathbb{F}^2$，满足

$$v = a_1(1,2) + a_2(3,5)$$

求解 a_1, a_2，得到唯一的一组解是

$$\begin{cases} a_1 = -5x_1 + 3x_2 \\ a_2 = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

这表明 $\mathbb{F}^2$ 中的每个向量都可以唯一地被表示为向量组 $(1,2),(3,5)$ 的线性组合。所以，根据基的判定准则（原书 2.28），向量组 $(1,2),(3,5)$ 是 $\mathbb{F}^2$ 的基。

对于 (c)，设 $a_1, a_2 \in \mathbb{F}$，满足

$$a_1(1,2,-4) + a_2(7,-5,6) = 0$$

这给出 $a_1 = a_2 = 0$，因此向量组 $(1,2,-4),(7,-5,6)$ 是线性无关的。反证假设向量组 $(1,2,-4),(7,-5,6)$ 张成 $\mathbb{F}^3$，则存在 $a_1, a_2 \in \mathbb{F}$，使得

$$(1,2,0) = a_1(1,2,-4) + a_2(7,-5,6)$$

然而，该方程组无解。因此，向量组 $(1,2,-4),(7,-5,6)$ 不张成 $\mathbb{F}^3$，所以它们不是 $\mathbb{F}^3$ 的基。

对于 (d)，由 (b) 可知，向量组 $(1,2),(3,5)$ 张成 $\mathbb{F}^2$，所以向量组 $(1,2),(3,5),(4,13)$ 也张成 $\mathbb{F}^2$。然而，注意到

$$(-19)(1,2) + 5(3,5) + 1(4,13) = 0$$

所以，向量组 $(1,2),(3,5),(4,13)$ 不是线性无关的，因此它们不是 $\mathbb{F}^2$ 的基。

对于 (e)，设 $a_1, a_2 \in \mathbb{F}$，$v = (x,x,y) \in \mathbb{F}^3$，满足

$$v = a_1(1,1,0) + a_2(0,0,1)$$

求解 a_1, a_2，得到唯一的一组解是

$$\begin{cases} a_1 = x \\ a_2 = y \end{cases}$$

这表明 $\{(x,x,y) \in \mathbb{F}^3 : x, y \in \mathbb{F}\}$ 中的每个向量都可以唯一地被表示为向量组 $(1,1,0),(0,0,1)$ 的线性组合。所以，根据基的判定准则，向量组 $(1,1,0),(0,0,1)$ 是 $\{(x,x,y) \in \mathbb{F}^3 : x, y \in \mathbb{F}\}$ 的基。

对于 (f)，设 $a_1, a_2 \in \mathbb{F}$，$v = (x, y, -x-y) \in \mathbb{F}^3$，满足

$$v = a_1(1,-1,0) + a_2(1,0,-1)$$

求解 a_1, a_2，得到唯一的一组解是

$$\begin{cases} a_1 = -y \\ a_2 = x + y \end{cases}$$

这表明 $\{(x,y,z)\in\mathbb{F}^3 : x+y+z=0\}$ 中的每个向量都可以唯一地被表示为向量组 $(1,-1,0),(1,0,-1)$ 的线性组合。所以，根据基的判定准则，向量组 $(1,-1,0),(1,0,-1)$ 是 $\{(x,y,z)\in\mathbb{F}^3 : x+y+z=0\}$ 的基。

对于 (g)，根据多项式的次数的定义（原书 2.11），立即可得 $1,z,\dots,z^m$ 张成 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$。现在反证假设 $1,z,\dots,z^m$ 不是线性无关的。即存在 $a_0,\dots,a_m\in\mathbb{F}$，其中至少有一个不为 0，使得对于任意 $z\in\mathbb{F}$，有

$$a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m=0$$

现在找到编号最大的不为 0 的系数 ℓ，即 $a_\ell\neq 0$，且 $a_k=0$ 对于 $\ell<k\leq m$ 成立。取

$$z=\frac{|a_0|+\cdots+|a_{\ell-1}|}{|a_m|}+1$$

注意到 $z\geq 1$，于是对 $j\in\{0,\dots,\ell-1\}$，有 $z^j\leq z^{\ell-1}$。使用三角不等式[注1]，我们有

$$\left|a_0+a_1z+\cdots+a_{\ell-1}z^{\ell-1}\right|\leq(|a_0|+\cdots+|a_{\ell-1}|)z^{\ell-1}<\left|a_\ell z^\ell\right|$$

于是 $a_0+a_1z+\cdots+a_{\ell-1}z^{\ell-1}\neq -a_\ell z^\ell$，这表明

$$a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m\neq 0$$

矛盾，因此 $1,z,\dots,z^m$ 是线性无关的。根据基的定义，$1,z,\dots,z^m$ 是 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 的基。■

注 对于 (g)，值得一提的是，上面证明的核心部分表明，多项式的系数是唯一的。这个巧妙的证明来自原书第三版的正文（定理 4.7），然而在第四版中被删除了，取而代之的是不那么直接的原书 4.8。

习题 3

(a) 设 U 为 $\mathbb{R}^5$ 的子空间，定义为

$$U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 : x_1=3x_2\wedge x_3=7x_4\}$$

求 U 的一个基；

(b) 将 (a) 中的基扩充为 $\mathbb{R}^5$ 的一个基；

(c) 求 $\mathbb{R}^5$ 的一个子空间 W，使得 $\mathbb{R}^5=U\oplus W$。

解答 对于 (a)，令

$$u_1=(3,1,0,0,0),\quad u_2=(0,0,7,1,0),\quad u_3=(0,0,0,0,1)$$

下面说明 u_1,u_2,u_3 是 U 的一个基。设 $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$，$v=(3x,x,7y,y,z)\in U$，满足

$$v=a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3$$

求解 a_1,a_2,a_3，得到唯一的一组解是

[注1] 见原书 4.4。一般而言，我们不应该引用后面的定理，因为这将带来循环论证的风险。但是复数的性质这个定理完全独立，因此从逻辑上说，这里引用原书 4.4 是没有问题的。

$$\begin{cases} a_1 = x \\ a_2 = y \\ a_3 = z \end{cases}$$

这表明 U 中的每个向量都可以唯一地被表示为向量组 u_1, u_2, u_3 的线性组合。所以，根据基的判定准则（原书 2.28），向量组 u_1, u_2, u_3 是 U 的基。

对于 (b)，令

$$u_4 = (1,0,0,0,0), \quad u_5 = (0,0,1,0,0)$$

下面说明 $u_1, ..., u_5$ 是 $\mathbb{R}^5$ 的一个基。设 $a_1, ..., a_5 \in \mathbb{R}$，$v = (x_1, ..., x_5) \in \mathbb{R}^5$，满足

$$v = a_1 u_1 + \cdots + a_5 u_5$$

求解 $a_1, ..., a_5$，得到唯一的一组解是

$$\begin{cases} a_1 = x_2 \\ a_2 = x_4 \\ a_3 = x_5 \\ a_4 = x_1 - 3x_2 \\ a_5 = x_3 - 7x_4 \end{cases}$$

这表明 $\mathbb{R}^5$ 中的每个向量都可以唯一地被表示为向量组 $u_1, ..., u_5$ 的线性组合。所以，根据基的判定准则，向量组 $u_1, ..., u_5$ 是 $\mathbb{R}^5$ 的基。

对于 (c)，令

$$w = \operatorname{span}(u_4, u_5)$$

我们首先说明，$\mathbb{R}^5 = U + W$。由于向量组 $u_1, ..., u_5$ 张成 $\mathbb{R}^5$，因此任意向量 $v \in \mathbb{R}^5$ 都可以被表示为

$$v = (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) + (a_4 u_4 + a_5 u_5)$$

注意到 $a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 \in U$，且 $a_4 u_4 + a_5 u_5 \in W$，故 $\mathbb{R}^5 = U + W$。

设 $v \in U \cap W$。则存在标量 $a_1, ..., a_5$，满足

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = v = a_4 u_4 + a_5 u_5$$

于是

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 - a_4 u_4 - a_5 u_5 = 0$$

由于 $u_1, ..., u_5$ 是线性无关的（见上面 (b) 的证明），因此 $a_1 = \cdots = a_5 = 0$。这表明 $v = 0$，因此 $U \cap W = \{0\}$。根据“两个子空间的直和”（原书 1.46），我们得到 $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$。

习题 4

(a) 设 U 为 $\mathbb{C}^5$ 的子空间，定义为

$$U=\left\{(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5)\in\mathbb{C}^5:6z_1=z_2\wedge z_3+2z_4+3z_5=0\right\}$$

求 U 的一个基；

(b) 将 (a) 中的基扩充为 $\mathbb{C}^5$ 的一个基；

(c) 求 $\mathbb{C}^5$ 的一个子空间 W，使得 $\mathbb{C}^5=U\oplus W$。

解答 对于 (a)，令

$$u_1=(1,6,0,0,0),\quad u_2=(0,0,-2,1,0),\quad u_3=(0,0,-3,0,1)$$

下面说明 u_1,u_2,u_3 是 U 的一个基。设 $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{C}$，$v=\left(x,6x,y,z,-\frac{1}{3}(y+2z)\right)\in U$，满足

$$v=a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3$$

求解 a_1,a_2,a_3，得到唯一的一组解是

$$\begin{cases}a_1=x\\a_2=z\\a_3=-\frac{1}{3}(y+2z)\end{cases}$$

这表明 U 中的每个向量都可以唯一地被表示为向量组 u_1,u_2,u_3 的线性组合。所以，根据基的判定准则（原书 2.28），向量组 u_1,u_2,u_3 是 U 的基。

对于 (b)，令

$$u_4=(1,0,0,0,0),\quad u_5=(0,0,0,1,0)$$

下面说明 $u_1,...,u_5$ 是 $\mathbb{C}^5$ 的一个基。设 $a_1,...,a_5\in\mathbb{C}$，$v=(z_1,...,z_5)\in\mathbb{C}^5$，满足

$$v=a_1u_1+\cdots+a_5u_5$$

求解 $a_1,...,a_5$，得到唯一的一组解是

$$\begin{cases}a_1=\frac{1}{6}z_2\\a_2=z_4\\a_3=z_5\\a_4=z_1-\frac{1}{6}z_2\\a_5=z_3+2z_4+3z_5\end{cases}$$

这表明 $\mathbb{C}^5$ 中的每个向量都可以唯一地被表示为向量组 $u_1,...,u_6$ 的线性组合。所以，根据基的判定准则，向量组 $u_1,...,u_6$ 是 $\mathbb{C}^5$ 的基。

对于 (c)，令

$$W=\operatorname{span}(u_4,u_5)$$

我们首先说明，$\mathbb{C}^5=U+W$。由于向量组 $u_1,\ldots,u_5$ 张成 $\mathbb{C}^5$，因此任意向量 $v\in\mathbb{C}^5$ 都可以被表示为

$$v=(a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3)+(a_4u_4+a_5u_5)$$

注意到 $a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3\in U$，且 $a_4u_4+a_5u_5\in W$，故 $\mathbb{C}^5=U+W$。

设 $v\in U\cap W$。则存在标量 $a_1,\ldots,a_5$，满足

$$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=v=a_4u_4+a_5u_5$$

于是

$$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3-a_4u_4-a_5u_5=0$$

由于 $u_1,\ldots,u_5$ 是线性无关的(见上面 (b) 的证明)，因此 $a_1=\cdots=a_5=0$。这表明 $v=0$，因此 $U\cap W=\{0\}$。根据“两个子空间的直和”（原书 1.46），我们得到 $\mathbb{C}^5=U\oplus W$。

习题 5 设 V 是有限维向量空间，U,W 是 V 的子空间，且 $V=U+W$。证明：V 有一个由 $U\cup W$ 中的向量组成的基。

证明 设 $u_1,\ldots,u_m\in U$ 是 U 的一组基，$w_1,\ldots,w_\ell\in W$ 是 W 的一组基。由于 $V=U+W$，因此任意向量 $v\in V$ 都可以被表示为

$$v=(a_1u_1+\cdots+a_mu_m)+(b_1w_1+\cdots+b_nw_\ell)$$

其中 $a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_\ell\in\mathbb{F}$。这表明

$$V=\operatorname{span}(u_1,\ldots,u_m,w_1,\ldots w_\ell)$$

由于每个张成组都包含基(原书 2.30)，因此 V 有一个由 $U\cup W$ 中的向量组成的基。■

习题 6 证明或证伪：如果 p_0,p_1,p_2,p_3 是 $\mathcal{P}_3(\mathbb{F})$ 中的向量组，该组中的每个多项式次数都不为 2，那么 p_0,p_1,p_2,p_3 不是 $\mathcal{P}_3(\mathbb{F})$ 的基。

解答 取 $\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ 上的函数 $p_0,\ldots,p_3$

$$\begin{aligned}p_0&:z\to 1\\ p_1&:z\to z\\ p_2&:z\to z^2+z^3\\ p_3&:z\to z^3\end{aligned}$$

设 $p\in\mathcal{P}_3(\mathbb{F})$，则根据多项式的次数的定义（原书 2.11），存在 $a_0,\ldots,a_3\in\mathbb{F}$，使得对于任意 $z\in\mathbb{F}$，有

$$p(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3$$

于是，

$$p = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + (a_3 - a_2)p_3$$

这表明 p 可以被表示为向量组 p_0, p_1, p_2, p_3 的线性组合，即 p_0, p_1, p_2, p_3 张成 $\mathcal{P}_3(\mathbb{F})$。

设 $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}$，满足

$$a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = 0$$

即对于任意 $z \in \mathbb{F}$，有

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + (a_2 + a_3)z^3 = 0$$

根据多项式系数的唯一性，我们有 $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$。这表明向量组 p_0, p_1, p_2, p_3 是线性无关的。

综上所述，p_0, p_1, p_2, p_3 是 $\mathcal{P}_3(\mathbb{F})$ 的基，故原命题不成立。

习题 7 设 v_1, v_2, v_3, v_4 是 V 的基，证明：向量组

$$v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$$

也是 V 的基。

证明 设 $v \in V$，注意到

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4$$

其中 $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{F}$。另一方面，设 $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{F}$，满足

$$v = b_1(v_1 + v_2) + b_2(v_2 + v_3) + b_3(v_3 + v_4) + b_4v_4$$

则

$$v = (b_1 + b_2)v_1 + (b_2 + b_3)v_2 + (b_3 + b_4)v_3 + b_4v_4$$

由于 v_1, v_2, v_3, v_4 是基，根据基的判定准则（原书 2.28），v_1, v_2, v_3, v_4 的系数只能对应相等，即

$$\begin{cases} a_1 = b_1 + b_2 \\ a_2 = b_2 + b_3 \\ a_3 = b_3 + b_4 \\ a_4 = b_4 \end{cases}$$

求解 b_1, b_2, b_3, b_4，得到唯一的一组解是

$$\begin{cases} b_1 = a_1 - a_2 \\ b_2 = a_2 - a_3 \\ b_3 = a_3 - a_4 \\ b_4 = a_4 \end{cases}$$

这表明 v 可以唯一地被表示为向量组 $v_1+v_2, v_2+v_3, v_3+v_4, v_4$ 的线性组合。因此，向量组 $v_1+v_2, v_2+v_3, v_3+v_4, v_4$ 是 V 的基。■

习题 8 证明或证伪：设向量组 v_1, v_2, v_3, v_4 是 V 的基，且子空间 U 满足 $v_1, v_2 \in U$，而 $v_3 \notin U$ 和 $v_4 \notin U$，则 v_1, v_2 是 U 的基。

解答 令 $V=\mathbb{R}^4$，且

$$v_1=(1,0,0,0),\quad v_2=(0,1,0,0),\quad v_3=(0,0,1,0),\quad v_4=(0,0,0,1)$$

注意到，集合

$$U=\left\{(x,y,z,z)\in\mathbb{R}^4 : x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

是 $\mathbb{R}^4$ 的子空间,且满足 $v_1, v_2 \in U$，而 $v_3 \notin U$ 和 $v_4 \notin U$。然而，v_1, v_2 不是 U 的基，因为向量 $(0,0,1,1)\in U$ 不是 $\operatorname{span}(u_1,u_2)$ 中的元素。由此可知，原命题不成立。

习题 9 设 $v_1,\dots,v_m$ 是 V 上的向量组，对于 $k\in\{1,\dots,m\}$，定义

$$w_k=v_1+\cdots+v_k$$

证明：向量组 $v_1,\dots,v_m$ 是 V 的基，当且仅当向量组 $w_1,\dots,w_m$ 是 V 的基。

证明 由 2A 节习题 3（见第 28 页）和 2A 节习题 14（见第 34 页）得证。■

习题 10 设 U 和 W 是 V 的子空间，且 $V=U\oplus W$。又设 $u_1,\dots,u_m$ 是 U 的基，$w_1,\dots,w_n$ 是 W 的基。证明：向量组

$$u_1,\dots,u_m,w_1,\dots,w_n$$

是 V 的基。

证明 设 $v\in V$，由于 $V=U\oplus W$，因此存在唯一的 $u_1,\dots,u_m\in U$ 和 $w_1,\dots,w_n\in W$，使得

$$v=(a_1u_1+\cdots+a_mu_m)+(b_1w_1+\cdots+b_nw_n)$$

其中 $a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{F}$，这表明 $u_1,\dots,u_m,w_1,\dots w_n$ 张成 V。

另一方面，设 $a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{F}$，满足

$$(a_1u_1+\cdots+a_mu_m)+(b_1w_1+\cdots+b_nw_n)=0$$

根据直和的条件（原书 1.45），必须有

$$\begin{aligned} a_1u_1+\cdots+a_mu_m&=0\\ b_1w_1+\cdots+b_nw_n&=0\end{aligned}$$

由于 $u_1,\dots,u_m$ 是 U 的基，$w_1,\dots,w_n$ 是 W 的基，根据基的定义（原书 2.26），我们有 $a_1=\cdots=a_m=b_1=\cdots=b_n=0$。这表明向量组 $u_1,\dots,u_m,w_1,\dots,w_n$ 是线性无关的。

综上所述，向量组 $u_1,\dots,u_m,w_1,\dots,w_n$ 是 V 的基。■

习题 11 设 V 是实向量空间，证明：若 $v_1,\dots,v_n$ 是 V（视为实向量空间）的基，则 $v_1,\dots,v_n$ 也是其复化 $V_{\mathbf{C}}$（视为复向量空间）的基。

注 复化 $V_{\mathbf{C}}$ 的定义见 1B 节习题 8（见第 10 页）。

证明 对于 $u+\mathrm{i}v\in V_{\mathbf{C}}$，由于 $v_1,\dots,v_n$ 是 V 的基，可以找到 $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ 和 $b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}$，使得

$$
\begin{aligned}
u&=a_1v_1+\cdots+a_nv_n\\
v&=b_1v_1+\cdots+b_nv_n
\end{aligned}
$$

于是

$$u+\mathrm{i}v=(a_1+\mathrm{i}b_1)v_1+\cdots+(a_n+\mathrm{i}b_n)v_n$$

这表明 $v_1,\dots,v_n$ 张成 $V_{\mathbf{C}}$。

另一方面，设 $a_1+\mathrm{i}b_1,\dots,a_n+\mathrm{i}b_n\in\mathbb{C}$，满足

$$(a_1+\mathrm{i}b_1)v_1+\cdots+(a_n+\mathrm{i}b_n)v_n=0+\mathrm{i}0$$

根据 $V_{\mathbf{C}}$ 上标量乘法的定义，这相当于

$$(a_1v_1+\cdots+a_nv_n)+\mathrm{i}(b_1v_1+\cdots+b_nv_n)=0+\mathrm{i}0$$

更进一步，必须有

$$
\begin{aligned}
a_1v_1+\cdots+a_nv_n&=0\\
b_1v_1+\cdots+b_nv_n&=0
\end{aligned}
$$

由于 $v_1,\dots,v_n$ 是 V 的基，根据基的定义（原书 2.26），我们有 $a_1=\cdots=a_n=b_1=\cdots=b_n=0$。这表明向量组 $v_1,\dots,v_n$ 是线性无关的。

综上所述，向量组 $v_1,\dots,v_n$ 是 $V_{\mathbf{C}}$ 的基。■

2C 维数

习题 1 证明：$\mathbb{R}^2$ 的子空间恰有 $\{0\}$，$\mathbb{R}^2$ 中所有过原点的直线，以及 $\mathbb{R}^2$ 本身。

证明 设 U 是 $\mathbb{R}^2$ 的子空间，根据子空间的维数性质（原书 2.37），有 $\dim U \in \{0,1,2\}$。

- 如果 $\dim U = 0$，则 $U = \operatorname{span}() = \{0\}$；
- 如果 $\dim U = 1$，则存在一个非零向量 v，使得 $U = \operatorname{span}(v)$，即 U 是过原点的直线；
- 如果 $\dim U = 2$，则根据满维数的子空间等于整个空间（原书 2.39），$U = \mathbb{R}^2$。

综上所述，$\mathbb{R}^2$ 的子空间恰有 $\{0\}$，$\mathbb{R}^2$ 中所有过原点的直线，以及 $\mathbb{R}^2$ 本身。 ■

习题 2 证明：$\mathbb{R}^3$ 的子空间恰有 $\{0\}$，$\mathbb{R}^3$ 中所有过原点的直线，$\mathbb{R}^3$ 中所有过原点的平面，以及 $\mathbb{R}^3$ 本身。

证明 设 U 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间，根据子空间的维数性质（原书 2.37），有 $\dim U \in \{0,1,2,3\}$。

- 如果 $\dim U = 0$，则 $U = \operatorname{span}() = \{0\}$；
- 如果 $\dim U = 1$，则存在一个非零向量 v，使得 $U = \operatorname{span}(v)$，即 U 是过原点的直线；
- 如果 $\dim U = 2$，则存在两个线性无关的向量 v_1, v_2，使得 $U = \operatorname{span}(v_1, v_2)$，即 U 是过原点的平面；
- 如果 $\dim U = 3$，则根据满维数的子空间等于整个空间（原书 2.39），$U = \mathbb{R}^3$。

综上所述，$\mathbb{R}^3$ 的子空间恰有 $\{0\}$，$\mathbb{R}^3$ 中所有过原点的直线，$\mathbb{R}^3$ 中所有过原点的平面，以及 $\mathbb{R}^3$ 本身。 ■

习题 3

(a) 令 $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) : p(6) = 0\}$，求 U 的一组基；
(b) 将 (a) 中的基扩充为 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的基；
(c) 求 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的一个子空间 W，使得 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = U \oplus W$。

解答 对于 (a)，我们的思路是，考虑到 $p(6) = 0$ 意味着任意 $p \in U$ 都可以表示为 $p(z) = (z-6)q(z)$，其中 $q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{F})$。因此，我们很容易猜测 $z-6, z^2-6z, z^3-6z^2, z^4-6z^3$[注 2] 是 U 的一组基。

为了说明这一点，我们首先证明 $z-6, z^2-6z, z^3-6z^2, z^4-6z^3$ 是线性无关的。设 $a,b,c,d \in \mathbb{F}$，满足对于任意 $z \in \mathbb{F}$，

$$a(z-6) + b\left(z^2-6z\right) + c\left(z^3-6z^2\right) + d\left(z^4-6z^3\right) = 0$$

[注 2] 将这些表达式看作关于 z 的函数，即这里表示的是 $z \mapsto \cdots$，下同。

整理得到

$$-6a+(a-6b)z+(b-6c)z^2+(c-6d)z^3+dz^4=0$$

根据多项式系数的唯一性，我们有

$$\begin{cases} -6a=0 \\ a-6b=0 \\ b-6c=0 \\ c-6d=0 \\ d=0 \end{cases}$$

由此可得 $a=b=c=d=0$，因此 $z-6, z^2-6z, z^3-6z^2, z^4-6z^3$ 是线性无关的。

根据子空间的维数的性质，我们知道 $\dim U \leq \dim \mathcal{P}_4(\mathbb{F})=5$。注意到 $z \mapsto z \notin U$，故 $U \neq \mathcal{P}_4(\mathbb{F})$，于是 $\dim U \leq 4$。另一方面，将 U 的一组基看作张成组，根据“线性无关组的长度 $\leq$ 张成组的长度”（原书 2.22），我们得到 $\dim U \geq 4$。于是只能有 $\dim U=4$。

代入 $z=6$，立即可以验证 $z-6, z^2-6z, z^3-6z^2, z^4-6z^3 \in U$，根据长度恰当的线性无关组是基（原书 2.38），我们得出 $z-6, z^2-6z, z^3-6z^2, z^4-6z^3$ 是 U 的一组基。

对于 (b)，注意到 $1 \notin U$，根据 2A 节习题 13（见第 33 页），可得向量组 $z-6, z^2-6z, z^3-6z^2, z^4-6z^3, 1$ 是线性无关的，进一步地，向量组 $z-6, z^2-6z, z^3-6z^2, z^4-6z^3, 1$ 是长度恰当（$\dim \mathcal{P}_4(\mathbb{F})=5$）的线性无关组，因此它是 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的一组基。

对于 (c)，我们可以取 $W=\operatorname{span}(1)$。由 (b) 可知 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})=U+W$，根据子空间之和的维数（原书 2.43），我们有

$$\dim \mathcal{P}_4(\mathbb{F})=\dim U+\dim W-\dim(U \cap W)$$

解得 $\dim(U \cap W)=0$，即 $U \cap W=\{0\}$。根据“两个子空间的直和”（原书 1.46），得到 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})=U \oplus W$。

习题 4

(a) 令 $U=\{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) : p''(6)=0\}$，求 U 的一组基；
(b) 将 (a) 中的基扩充为 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的基；
(c) 求 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的一个子空间 W，使得 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})=U \oplus W$。

解答 对于 (a)，向量组 $1, z, z^3-18z^2, z^4-216z^2$ 是 U 的一组基。为了说明这一点，我们首先证明 $1, z, z^3-18z^2, z^4-216z^2$ 是线性无关的。设 $a, b, c, d \in \mathbb{F}$，满足对于任意 $z \in \mathbb{F}$，

$$a+bz+c\left(z^3-18z^2\right)+d\left(z^4-216z^2\right)=0$$

整理得到

$$a+bz+(-18c-216d)z^2+cz^3+dz^4=0$$

根据多项式系数的唯一性，我们有

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ -18c - 216d = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

由此可得 $a = b = c = d = 0$，因此 $1, z, z^3 - 18z^2, z^4 - 216z^2$ 是线性无关的。

根据子空间的维数的性质，我们知道 $\dim U \leq \dim \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = 5$。注意到 $z \mapsto z^2 \notin U$，故 $U \neq \mathcal{P}_4(\mathbb{F})$，于是 $\dim U \leq 4$。另一方面，将 U 的一组基看作张成组，根据“线性无关组的长度 $\leq$ 张成组的长度”（原书 2.22），我们得到 $\dim U \geq 4$。于是只能有 $\dim U = 4$。

分别求二阶导，再代入 $z = 6$，可以验证 $1, z, z^3 - 18z^2, z^4 - 216z^2 \in U$，根据长度恰当的线性无关组是基（原书 2.38），我们得出 $1, z, z^3 - 18z^2, z^4 - 216z^2$ 是 U 的一组基。

对于 (b)，注意到 $z^2 \notin U$，根据 2A 节习题 13（见第 33 页），可得向量组 $1, z, z^3 - 18z^2, z^4 - 216z^2, z^2$ 是线性无关的，进一步地，向量组 $1, z, z^3 - 18z^2, z^4 - 216z^2, z^2$ 是长度恰当（$\dim \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = 5$）的线性无关组，因此它是 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的一组基。

对于 (c)，我们可以取 $W = \operatorname{span}(z^2)$。由 (b) 可知 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = U + W$，根据子空间之和的维数（原书 2.43），我们有

$$\dim \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

解得 $\dim(U \cap W) = 0$，即 $U \cap W = \{0\}$。根据“两个子空间的直和”（原书 1.46），得到 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = U \oplus W$。

习题 5

(a) 令 $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) : p(2) = p(5)\}$，求 U 的一组基；
(b) 将 (a) 中的基扩充为 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的基；
(c) 求 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的一个子空间 W，使得 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = U \oplus W$。

解答 对于 (a)，向量组 $1, z^2 - 7z, z^3 - 39z, z^4 - 203z$ 是 U 的一组基。为了说明这一点，我们首先证明 $1, z^2 - 7z, z^3 - 39z, z^4 - 203z$ 是线性无关的。设 $a, b, c, d \in \mathbb{F}$，满足对于任意 $z \in \mathbb{F}$，

$$a + b\left(z^2 - 7z\right) + c\left(z^3 - 39z\right) + d\left(z^4 - 203z\right) = 0$$

整理得到

$$a + (-7b - 39c - 203d)z + bz^2 + cz^3 + dz^4 = 0$$

根据多项式系数的唯一性，我们有

$$\begin{cases} a = 0 \\ -7b - 39c - 203d = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

由此可得 $a = b = c = d = 0$，因此 $1, z^2 - 7z, z^3 - 39z, z^4 - 203z$ 是线性无关的。

根据子空间的维数的性质，我们知道 $\dim U \leq \dim \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = 5$。注意到 $z \mapsto z \notin U$，故 $U \neq \mathcal{P}_4(\mathbb{F})$，于是 $\dim U \leq 4$。另一方面，将 U 的一组基看作张成组，根据“线性无关组的长度 $\leq$ 张成组的长度”（原书 2.22），我们得到 $\dim U \geq 4$。于是只能有 $\dim U = 4$。

分别代入 $z = 2$ 和 $z = 5$，可以验证 $1, z^2 - 7z, z^3 - 39z, z^4 - 203z \in U$，根据长度恰当的线性无关组是基（原书 2.38），我们得出 $1, z^2 - 7z, z^3 - 39z, z^4 - 203z$ 是 U 的一组基。

对于 (b)，注意到 $z \notin U$，根据 2A 节习题 13（见第 33 页），可得向量组 $1, z^2 - 7z, z^3 - 39z, z^4 - 203z, z$ 是线性无关的，进一步地，向量组 $1, z^2 - 7z, z^3 - 39z, z^4 - 203z, z$ 是长度恰当（$\dim \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = 5$）的线性无关组，因此它是 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的一组基。

对于 (c)，我们可以取 $W = \operatorname{span}(z)$。由 (b) 可知 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = U + W$，根据子空间之和的维数（原书 2.43），我们有

$$\dim \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

解得 $\dim(U \cap W) = 0$，即 $U \cap W = \{0\}$。根据“两个子空间的直和”（原书 1.46），得到 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = U \oplus W$。

习题 6

(a) 令 $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) : p(2) = p(5) = p(6)\}$，求 U 的一组基；
(b) 将 (a) 中的基扩充为 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的基；
(c) 求 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的一个子空间 W，使得 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = U \oplus W$。

解答 对于 (a)，向量组 $1, z^3 - 13z^2 + 52z, z^4 - 117z^2 + 616z$ 是 U 的一组基。为了说明这一点，我们首先证明 $1, z^3 - 13z^2 + 52z, z^4 - 117z^2 + 616z$ 是线性无关的。设 $a, b, c \in \mathbb{F}$，满足对于任意 $z \in \mathbb{F}$，

$$a + b\left(z^3 - 13z^2 + 52z\right) + c\left(z^4 - 117z^2 + 616z\right) = 0$$

整理得到

$$a + (52b + 616c)z + (-13b - 117c)z^2 + bz^3 + cz^4 = 0$$

根据多项式系数的唯一性，我们有

$$\begin{cases} a=0 \\ 52b+616c=0 \\ -13b-117c=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

由此可得 $a=b=c=0$，因此 $1, z^3-13z^2+52z, z^4-117z^2+616z$ 是线性无关的。

设 U_0 表示习题 5 中的子空间 U。根据子空间的维数的性质，我们知道 $\dim U \leq \dim U_0 = 4$。注意到 $(z-2)(z-5) \in U_0$ 但是 $(z-2)(z-5) \notin U$，故 $U \neq U_0$，于是 $\dim U \leq 3$。另一方面，将 U 的一组基看作张成组，根据"线性无关组的长度 $\leq$ 张成组的长度"（原书 2.22），我们得到 $\dim U \geq 3$。于是只能有 $\dim U = 3$。

分别代入 $z=2$、$z=5$ 和 $z=6$，可以验证 $1, z^3-13z^2+52z, z^4-117z^2+616z \in U$，根据长度恰当的线性无关组是基（原书 2.38），我们得出 $1, z^3-13z^2+52z, z^4-117z^2+616z$ 是 U 的一组基。

对于 (b)，注意到 $(z-2)(z-5) \notin U$，根据 2A 节习题 13（见第 33 页），可得向量组 $1, z^3-13z^2+52z, z^4-117z^2+616z, (z-2)(z-5)$ 是线性无关的。进一步地，注意到该向量组中的多项式均满足在 $z=2$ 处的取值与在 $z=5$ 处的取值相等，故

$$z^2 \notin \operatorname{span}\big(1, z^3-13z^2+52z, z^4-117z^2+616z, (z-2)(z-5)\big)$$

所以，向量组 $1, z^3-13z^2+52z, z^4-117z^2+616z, (z-2)(z-5), z^2$ 是线性无关的，作为长度恰当（$\dim \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = 5$）的线性无关组，它是 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的一组基。

对于 (c)，我们可以取 $W = \operatorname{span}\big((z-2)(z-5), z^2\big)$。由 (b) 可知 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = U + W$，根据子空间之和的维数（原书 2.43），我们有

$$\dim \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

解得 $\dim(U \cap W) = 0$，即 $U \cap W = \{0\}$。根据"两个子空间的直和"（原书 1.46），得到 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = U \oplus W$。

习题 7

(a) 令 $U = \left\{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) : \int_{-1}^{1} p = 0\right\}$，求 U 的一组基；
(b) 将 (a) 中的基扩充为 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的基；
(c) 求 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的一个子空间 W，使得 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = U \oplus W$。

解答 我们的思路是，考虑到

$$\int_{-1}^{1} a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 \, \mathrm{d}z = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 \qquad \text{（式 1）}$$

我们很容易猜测 $z, 3z^2-1, z^3, 5z^4-1$ 是 U 的一组基。为了严格说明这一点，我们首先证明 $z, 3z^2-1, z^3, 5z^4-1$ 是线性无关的。设 $a, b, c, d \in \mathbb{F}$，满足对于任意 $z \in \mathbb{F}$，

$$az + b(3z^2 - 1) + cz^3 + d(5z^4 - 1) = 0$$

整理得到

$$(-b - d) + az + (3b)z^2 + cz^3 + (5d)z^4 = 0$$

根据多项式系数的唯一性，我们有

$$\begin{cases} -b - d = 0 \\ a = 0 \\ 3b = 0 \\ c = 0 \\ 5d = 0 \end{cases}$$

由此可得 $a = b = c = d = 0$，因此 $z, 3z^2 - 1, z^3, 5z^4 - 1$ 是线性无关的。

根据子空间的维数的性质，我们知道 $\dim U \leq \dim \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = 5$。注意到 $z \mapsto 1 \notin U$，故 $U \neq \mathcal{P}_4(\mathbb{F})$，于是 $\dim U \leq 4$。另一方面，将 U 的一组基看作张成组，根据“线性无关组的长度 $\leq$ 张成组的长度”（原书 2.22），我们得到 $\dim U \geq 4$。于是只能有 $\dim U = 4$。

将系数代入式 1 的积分结果，发现 $z, 3z^2 - 1, z^3, 5z^4 - 1 \in U$，根据长度恰当的线性无关组是基（原书 2.38），我们得出 $z, 3z^2 - 1, z^3, 5z^4 - 1$ 是 U 的一组基。

对于 (b)，注意到 $1 \notin U$，根据 2A 节习题 13（见第 33 页），可得向量组 $z, 3z^2 - 1, z^3, 5z^4 - 1, 1$ 是线性无关的，进一步地，向量组 $z, 3z^2 - 1, z^3, 5z^4 - 1, 1$ 是长度恰当（$\dim \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = 5$）的线性无关组，因此它是 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的一组基。

对于 (c)，我们可以取 $W = \operatorname{span}(1)$。由 (b) 可知 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = U + W$，根据子空间之和的维数（原书 2.43），我们有

$$\dim \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

解得 $\dim(U \cap W) = 0$，即 $U \cap W = \{0\}$。根据“两个子空间的直和”（原书 1.46），得到 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = U \oplus W$。

习题 8 设向量组 $v_1, \ldots, v_m$ 在 V 中线性无关，$w \in V$，证明

$$\dim \operatorname{span}(v_1 + w, \ldots, v_m + w) \geq m - 1$$

证明 $m = 1$ 的情况是平凡的。对于 $m \geq 2$，我们注意到以下事实：

- $-v_1 \notin \operatorname{span}(v_2, \ldots, v_m)$；
- $v_2, \ldots, v_m$ 线性无关。

根据 2A 节习题 12（见第 33 页）的逆否命题，我们得到 $v_2 - v_1, \ldots, v_m - v_1$ 是线性无关的。另一方面，注意到，对于任意 $k \in \{2, \ldots, m\}$

$$v_k - v_1 = (v_k + w) - (v_1 + w) \in \operatorname{span}(v_1 + w, \ldots, v_m + w)$$

综上所述，$v_2 - v_1, \dots, v_m - v_1$ 是 $\operatorname{span}(v_1 + w, \dots, v_m + w)$ 上的一个线性无关组，因此，根据“线性无关组的长度 ≤ 张成组的长度”（原书 2.22），我们得到结论 $\dim \operatorname{span}(v_1 + w, \dots, v_m + w) \geq m - 1$。■

注 可以验证，上面结论等号成立，当且仅当存在 $i, j \in \{1, \dots, m\}$（$i \neq j$），使得 $w = \lambda v_i + \mu v_j$，其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$，满足 $\lambda + \mu = -1$。

习题 9 设 m 是正整数，$p_0, \dots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$，其中 p_k 的次数为 k，证明：$p_0, \dots, p_m$ 是 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 的基。

证明 我们首先论证：对于任意自然数 m，$p_0, \dots, p_m$ 是线性无关的。我们关于 m 使用数学归纳法。

第 0 步

当 $m = 0$ 时，根据 2A 节习题 4（见第 29 页），向量组 p_0 是线性无关的。

第 k 步

假设向量组 $p_0, \dots, p_{k-1}$ 是线性无关的。根据多项式系数的唯一性，k 次多项式 $p_k \notin \operatorname{span}(p_0, \dots, p_{k-1})$，于是根据 2A 节习题 13（见第 33 页），向量组 $p_0, \dots, p_k$ 是线性无关的。

综上所述，对于任意自然数 m，向量组 $p_0, \dots, p_m$ 是线性无关的。注意到对于任意正整数 m，$\mathcal{P}_m(\mathbb{F}) = m + 1$，根据长度恰当的线性无关组是基（原书 2.38），$p_0, \dots, p_m$ 是 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 的基。■

习题 10 设 m 是正整数，对于 $k \in \{0, \dots, m\}$，令

$$\begin{aligned} p_k : \mathbb{F} &\to \mathbb{F} \\ z &\mapsto z^k (1 - z)^{m-k} \end{aligned}$$

证明：$p_0, \dots, p_m$ 是 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 的基。

注 这道习题中的基能够引出所谓伯恩斯坦多项式（Bernstein polynomials）。你可以上网搜索，了解伯恩斯坦多项式如何用于逼近 $[0, 1]$ 上的连续函数。

证明 注意到，根据二项式定理，对于任意 $j \in \{0, \dots, m\}$，

$$z^j = \sum_{k=j}^{m} \binom{m-j}{k-j} z^k (1 - z)^{m-k}$$

即 $1, z, \dots, z^m$ 均可用 $p_0, \dots, p_m$ 的线性组合表示，于是 $p_0, \dots, p_k$ 张成 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$。

注意到 $\dim \mathcal{P}_m(\mathbb{F}) = m + 1$，根据恰当长度的张成组是基（原书 2.42），$p_0, \dots, p_m$ 是 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 的基。■

习题 11 设 U 和 W 都是 $\mathbb{C}^6$ 的四维子空间，证明：在 $U \cap W$ 中存在两个向量，其中任意一个都不是另一个的标量倍。

证明 根据子空间之和的维数（原书 2.43），我们有

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$$

另一方面，根据子空间的维数性质（原书 2.37），$\dim(U+W) \leq \dim \mathbb{C}^6 = 6$。因此，

$$\dim(U\cap W)\geq 2$$

设 $u_1, \ldots, u_m$ 是 $U \cap W$ 的一组基，其中 $m \geq 2$。则 u_1, u_2 是线性无关的。根据 2A 节习题 4（见第 29 页），u_1, u_2 中任意一个都不是另一个的标量倍。由此得证。■

习题 12 设 U 和 W 都是 $\mathbb{R}^8$ 的子空间，$\dim U = 3$，$\dim W = 5$，且 $U + W = \mathbb{R}^8$，证明：$\mathbb{R}^8 = U \oplus W$。

证明 根据子空间之和的维数（原书 2.43），我们有

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$$

解得 $\dim(U \cap W) = 0$，即 $U \cap W = \{0\}$。根据“两个子空间的直和”（原书 1.46），得到 $\mathbb{R}^8 = U \oplus W$。■

习题 13 设 U 和 W 都是 $\mathbb{R}^9$ 的五维子空间，证明：$U \cap W \neq \{0\}$。

证明 根据子空间之和的维数（原书 2.43），我们有

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$$

另一方面，根据子空间的维数性质（原书 2.37），$\dim(U+W) \leq \dim \mathbb{R}^9 = 9$。因此，

$$\dim(U\cap W)\geq 1$$

由此得证 $U \cap W \neq \{0\}$。■

习题 14 设 V 是 10 维向量空间，V_1, V_2, V_3 都是 V 的子空间，$\dim V_1 = \dim V_2 = \dim V_3 = 7$，证明：$V_1 \cap V_2 \cap V_3 \neq \{0\}$。

证明 根据子空间之和的维数（原书 2.43），我们有

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$$
$$\dim((V_1+V_2)+V_3)=\dim(V_1+V_2)+\dim V_3-\dim((V_1+V_2)\cap V_3)$$

上下两式相加，化简得

$$\begin{aligned}\dim(V_1+V_2+V_3)=\dim V_1+\dim V_2+\dim V_3\\-\dim(V_1\cap V_2)-\dim((V_1+V_2)\cap V_3)\end{aligned}$$

另一方面，根据子空间的维数性质（原书 2.37），$\dim(V_1+V_2+V_3)\le\dim V=10$。同时，考虑到 $(V_1+V_2)\cap V_3\subseteq V_3$，我们有 $\dim((V_1+V_2)\cap V_3)\le\dim V_3=7$，因此

$$\dim(V_1\cap V_2)\ge 4$$

同时

$$\dim((V_1\cap V_2)+V_3)=\dim(V_1\cap V_2)+\dim V_3-\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)$$

结合 $\dim((V_1\cap V_2)+V_3)\le\dim V=10$，于是

$$4\le\dim(V_1\cap V_2)\le 3+\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)$$

所以 $\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)\ge 1$，由此得证 $V_1\cap V_2\cap V_3\ne\{0\}$。■

习题 15 设 V 是有限维向量空间，V_1,V_2,V_3 都是 V 的子空间，$\dim V_1+\dim V_2+\dim V_3>2\dim V$，证明：$V_1\cap V_2\cap V_3\ne\{0\}$。

证明 根据子空间之和的维数（原书 2.43），我们有

$$\begin{aligned}\dim((V_1\cap V_2)+V_3)&=\dim(V_1\cap V_2)+\dim V_3-\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)\\\dim(V_1+V_2)&=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)\end{aligned}$$

两式向加，移项得

$$\begin{aligned}\dim((V_1\cap V_2)+V_3)&=\dim V_1+\dim V_2+\dim V_3\\&\quad-\dim(V_1+V_2)-\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)\\&>2\dim V-\dim(V_1+V_2)-\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)\end{aligned}$$

另一方面，根据子空间的维数性质（原书 2.37），$\dim((V_1\cap V_2)+V_3)\le\dim V$，以及 $\dim(V_1+V_2)\le\dim V$，因此

$$\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)>0$$

由此得证 $V_1\cap V_2\cap V_3\ne\{0\}$。■

习题 16 设 V 是有限维向量空间，U 是 V 的子空间（$U\ne V$）。令 $n=\dim V$，$m=\dim U$，证明：V 中存在这样 $n-m$ 个子空间，其中每个子空间的维数都是 $n-1$，且它们的交集是 U。

证明 设 $u_1,\dots,u_m$ 是 U 的一组基，将其看作 V 中的线性无关组，根据每个线性无关组都可被扩充为基（原书 2.32），我们可以将 $u_1,\dots,u_m$ 扩充为 V 的一组基 $u_1,\dots,u_n$。现在，对于 $k\in\{1,\dots,n-m\}$ 和 $j\in\{1,\dots,n-1\}$，令

$$W_k = \operatorname{span}(u_1, ..., u_{m+k-1}, u_{m+k+1}, ..., u_n)$$

即 W_k 是向量组 $u_1, ..., u_m$ 中去掉第 $m+k$ 个向量后得到的向量组所张成的子空间。注意到 $\dim W_k = n-1$，因此 $W_1, ..., W_{n-m}$ 是 V 的 $n-m$ 个维数为 $n-1$ 的子空间。同时，注意到 $U = \operatorname{span}(u_1, ..., u_m) \subseteq W_k$，因此

$$U \subseteq W_1 \cap \cdots \cap W_{n-m}$$

另一方面，我们说明 $W_1 \cap \cdots \cap W_{n-m} \subseteq U$。当 $n-m=1$ 时，情况是平凡的。现在设 $v \in W_1 \cap \cdots \cap W_{n-m}$，则对于 $k \in \{1, ..., n-m\}$ 和 $i \in \{1, ..., n\}$，存在 $a_{k,i}$，使得对于任意 $k \in \{1, ..., n-m\}$，有

$$v = a_{k,1}u_1 + \cdots + a_{k,n}u_n$$

且 $a_{k,m+k} = 0$。现在，对于任意 $j \in \{2, ..., n-m\}$，我们将 v 在 W_1 和 W_j 中线性组合的表达式相减，得到

$$0 = (a_{1,1} - a_{j,1})u_1 + \cdots + (a_{1,n} - a_{j,n})u_n$$

由于 $u_1, ..., u_n$ 是线性无关的，因此，对于任意 $i \in \{1, ..., n\}$，$a_{1,i} = a_{j,i}$。特别注意到，$a_{1,m+j} = a_{j,m+j} = 0$，考虑到 $a_{1,m+1} = 0$，以及 $j \in \{2, ..., n-m\}$ 选取的任意性，我们得到，对于任意 $j \in \{1, ..., n-m\}$，$a_{1,m+j} = 0$，即

$$v = a_{1,1}u_1 + \cdots + a_{1,m}u_m \in U$$

这表明 $W_1 \cap \cdots \cap W_{n-m} \subseteq U$。

综上所述 $U = W_1 \cap \cdots \cap W_{n-m}$。也就是说，$W_1, ..., W_{n-m}$ 就是所求的 $n-m$ 个子空间。■

习题 17 设 $V_1, ..., V_m$ 都是 V 的有限维子空间，证明：$V_1 + \cdots + V_m$ 是有限维的，且

$$\dim(V_1 + \cdots + V_m) \leq \dim V_1 + \cdots + \dim V_m$$

注 以上不等式取等，当且仅当 $V_1 + \cdots + V_m$ 是直和，这将在原书 3.94 中得到证明。

证明 我们关于 m 使用数学归纳法。

第 1 步

当 $m=1$ 时，V_1 根据题目条件自然是有限维的，且 $\dim V_1 \leq \dim V_1$。

第 k 步

假设 $V_1 + \cdots + V_{k-1}$ 是有限维的，且 $\dim(V_1 + \cdots + V_{k-1}) \leq \dim V_1 + \cdots + \dim V_{k-1}$。设 $u_1, ..., u_n$ 是其的一组基。同时，V_k 是有限维的，设 $v_1, ..., v_\ell$ 是其的一组基。则

$$V_1 + \cdots + V_k = \operatorname{span}(u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_\ell)$$

于是，$V_1 + \cdots + V_k$ 是有限维的。根据子空间之和的维数（原书 2.43），我们有

$$\begin{aligned}\dim(V_1+\cdots+V_k)&=\dim(V_1+\cdots+V_{k-1})+\dim V_k\\&\quad-\dim((V_1+\cdots+V_{k-1})\cap V_k)\end{aligned}$$

根据归纳假设，

$$\begin{aligned}\dim(V_1+\cdots+V_k)&\le\dim(V_1+\cdots+V_{k-1})+\dim V_k\\&\le\dim V_1+\cdots+\dim V_k\end{aligned}$$

综上所述，$V_1+\cdots+V_m$ 是有限维的，且 $\dim(V_1+\cdots+V_m)\le\dim V_1+\cdots+\dim V_m$。■

习题 18 设 V 是有限维向量空间，$\dim V=n\ge 1$。证明：存在 V 的一维子空间 $V_1,\ldots,V_n$，使得

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_n$$

证明 设 $v_1,\ldots,v_n$ 是 V 的一组基。我们可以取 $V_k=\operatorname{span}(v_k)$，其中 $k\in\{1,\ldots,n\}$。注意到 $\dim V_k=1$，因此 $V_1,\ldots,V_n$ 都是 V 的一维子空间。根据基的判定准则（原书 2.28）和直和的定义（原书 1.41），我们立即得到 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_n$。■

习题 19 受三个有限集的并集的元素数量公式的启发，你可能会这样猜测：若 V_1,V_2,V_3 是一个有限维向量空间的子空间，那么有

$$\begin{aligned}\dim(V_1+V_2+V_3)&=\dim V_1+\dim V_2+\dim V_3\\&\quad-\dim(V_1\cap V_2)-\dim(V_1\cap V_3)-\dim(V_2\cap V_3)\\&\quad+\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)\end{aligned}$$

解释一下为什么这样猜测，然后证明以上公式，或给出反例。

解释 有限集的并集的元素数量公式，由容斥原理给出，对于三个集合而言，

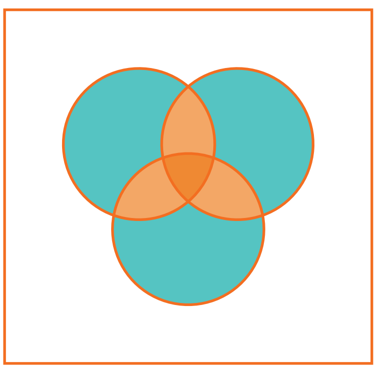

图 3 三个集合的韦恩图。

$$\begin{aligned}\#(A\cup B\cup C)=\#A+\#B+\#C\\&-\#(A\cap B)-\#(A\cap C)-\#(B\cap C)\\&+\#(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

这能够很自然地迁移到有关子空间维数的公式上来。然而，这一猜想并不正确，考虑取

$$V_1=\{(0,x)\in\mathbb{R}^2:x\in\mathbb{R}\}$$
$$V_2=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2:x\in\mathbb{R}\}$$
$$V_3=\{(x,x)\in\mathbb{R}^2:x\in\mathbb{R}\}$$

则 $\dim V_1=\dim V_2=\dim V_3=1$, $\dim(V_1\cap V_2)=\dim(V_1\cap V_3)=\dim(V_2\cap V_3)=0$, $\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)=0$, 然而 $\dim(V_1+V_2+V_3)=2\ne 1+1+1-0-0-0+0=3$。

因此，该猜想是错误的。

习题 20 已知 V_1，V_2 和 V_3 都是一个有限维向量空间的子空间，证明:

$$\begin{aligned}\dim(V_1+V_2+V_3) = {} & \dim V_1+\dim V_2+\dim V_3 \\ & -\frac{\dim(V_1\cap V_2)}{3}-\frac{\dim(V_1\cap V_3)}{3}-\frac{\dim(V_2\cap V_3)}{3} \\ & -\frac{\dim((V_1+V_2)\cap V_3)}{3} \\ & -\frac{\dim((V_1+V_3)\cap V_2)}{3} \\ & -\frac{\dim((V_2+V_3)\cap V_1)}{3}\end{aligned}$$

注 上面公式初看可能有些奇怪，因为等式右边是否是整数令人怀疑。

证明 等式两边同时乘以 3，并利用子空间之和的维数（原书 2.43）将形如 $\dim(A\cap B)$ 的项代换，我们得到[注3]

$$\begin{aligned}3\,\text{R.H.S.} = {} & 3\dim V_1+3\dim V_2+3\dim V_3 \\ & -(\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)) \\ & -(\dim V_1+\dim V_3-\dim(V_1+V_3)) \\ & -(\dim V_2+\dim V_3-\dim(V_2+V_3)) \\ & -(\dim(V_1+V_2)+\dim V_3-\dim(V_1+V_2+V_3)) \\ & -(\dim(V_1+V_3)+\dim V_2-\dim(V_1+V_3+V_2)) \\ & -(\dim(V_2+V_3)+\dim V_1-\dim(V_2+V_3+V_1))\end{aligned}$$

整理后，立即给出了等式两边相等的结果。■

注3 R.H.S. 是 Right Hand Side 的缩写，表示等式右边的表达式。对称地，L.H.S. 是 Left Hand Side 的缩写，表示等式左边的表达式。

第 3 章 线性映射

3A 线性映射的向量空间

注 与原书一致，在本章中，如无其他说明，我们总是假定字母 U，V 和 W 都是 $\mathbb{F}$ 上的向量空间。

习题 1 设 $b, c \in \mathbb{R}$。定义

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ &(x, y, z) \mapsto (2x - 4y + 3z + b, 6x + cxyz) \end{aligned}$$

证明：T 是线性映射，当且仅当，$b = c = 0$。

证明 首先，假设 $b = c = 0$。则 $T(x, y, z) = (2x - 4y + 3z, 6x)$，我们逐条验证线性映射的定义（原书 3.1）中的要求：

可加性 对任意 $u, v \in \mathbb{R}^3$，$T(u + v) = Tu + Tv$。

证明：设 $u = (u_1, u_2, u_3)$，$v = (v_1, v_2, v_3)$，则

$$\begin{aligned} T(u + v) &= T(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\ &= (2(u_1 + v_1) - 4(u_2 + v_2) + 3(u_3 + v_3), 6(u_1 + v_1)) \\ &= (2u_1 - 4u_2 + 3u_3, 6u_1) + (2v_1 - 4v_2 + 3v_3, 6v_1) \\ &= Tu + Tv \end{aligned}$$

齐次性 对任意 $u \in \mathbb{R}^3$ 和任意 $\lambda \in \mathbb{R}$，$T(\lambda u) = \lambda Tu$。

证明：设 $u = (u_1, u_2, u_3)$，则

$$\begin{aligned} T(\lambda u) &= T(\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3) \\ &= (2(\lambda u_1) - 4(\lambda u_2) + 3(\lambda u_3), 6(\lambda u_1)) \\ &= \lambda(2u_1 - 4u_2 + 3u_3, 6u_1) \\ &= \lambda Tu \end{aligned}$$

综上，T 满足线性映射的定义。

另一方面，假设 T 是线性映射。则根据线性映射将 0 映射到 0（原书 3.10），有

$$\begin{aligned} T(0, 0, 0) &= (2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + b, 6 \cdot 0 + c \cdot 0) \\ &= (b, 0) = (0, 0) \end{aligned}$$

因此 $b = 0$。另一方面，设 $u = (1, 1, 1)$，则根据齐次性的要求，有

$$T(2u) = (2, 12 + 8c) = (2, 12 + 2c) = 2T(u)$$

于是，$c = 0$。

综上所述，T 是线性映射，当且仅当 $b = c = 0$。 ■

习题 2 设 $b, c \in \mathbb{R}$。定义

$$\begin{aligned} T: \mathcal{P}(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto \begin{bmatrix} 3p(4) + 5p'(6) + bp(1)p(2) \\ \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\,\mathrm{d}x + c\sin p(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

证明：T 是线性映射，当且仅当，$b = c = 0$。

证明 首先，假设 $b = c = 0$。则 $T(p) = \left(3p(4) + 5p'(6), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\,\mathrm{d}x\right)$，我们逐条验证线性映射的定义（原书 3.1）中的要求：

可加性 对任意 $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$，$T(p+q) = Tp + Tq$。

证明：设 $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$，则

$$\begin{aligned} T(p+q) &= \left(3(p+q)(4) + 5(p+q)'(6), \int_{-1}^{2} x^3 (p+q)(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \left(3p(4) + 3q(4) + 5p'(6) + 5q'(6), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} x^3 q(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \left(3p(4) + 5p'(6), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\,\mathrm{d}x\right) + \left(3q(4) + 5q'(6), \int_{-1}^{2} x^3 q(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= Tp + Tq \end{aligned}$$

齐次性 对任意 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 和任意 $\lambda \in \mathbb{R}$，$T(\lambda p) = \lambda Tp$。

证明：设 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$，则

$$\begin{aligned} T(\lambda p) &= \left(3(\lambda p)(4) + 5(\lambda p)'(6), \int_{-1}^{2} x^3 (\lambda p)(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \left(\lambda(3p(4)) + \lambda(5p'(6)), \lambda \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \lambda\left(3p(4), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \lambda Tp \end{aligned}$$

综上，T 满足线性映射的定义。

另一方面，假设 T 是线性映射。设 $p: x \mapsto x + 1$。则根据齐次性的要求，有

$$T(2p) = \left(40 + 24b, \frac{207}{10} + c\sin 2\right) = \left(40 + 12b, \frac{207}{10} + 2c\sin 1\right) = 2T(p)$$

解得 $b = c = 0$。这就是说 T 是线性映射，当且仅当 $b = c = 0$。 ∎

习题 3 设 $T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^m)$。证明：对于 $j \in \{1, \ldots, m\}$ 和 $k \in \{1, \ldots, n\}$，存在标量 $A_{j,k} \in \mathbf{F}$，使得对于任意 $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{F}^n$，

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \left(A_{1,1}x_1 + \cdots + A_{1,n}x_n, \ldots, A_{m,1}x_1 + \cdots + A_{m,n}x_n\right)$$

注 此习题表明，线性映射 T 具有在原书例 3.3 的倒数第二个例子中预示的形式。

证明 对于 $j \in \{1, \ldots, m\}$ 和 $k \in \{1, \ldots, n\}$，令 $w_j \in \mathbf{F}^m$ 和 $v_k \in \mathbf{F}^n$ 分别为第 j 个和第 k 个分量为 1，其余分量为 0 的向量。

容易发现，$w_1, \ldots, w_m$ 是 $\mathbf{F}^m$ 的基，$v_1, \ldots, v_n$ 是 $\mathbf{F}^n$ 的基。于是，对于任意 $k \in \{1, \ldots, n\}$，可以找到 $A_{1,1}, \ldots, A_{m,1} \in \mathbf{F}$，使得

$$Tv_k = A_{1,k}w_1 + \cdots + A_{m,k}w_m$$

另一方面，根据 v_k 的定义，我们知道 $(x_1, \ldots, x_n) = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$。同时，考虑到 T 是线性映射，我们有

$$\begin{aligned}
T(x_1, \ldots, x_n) &= T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} T(x_k v_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k T v_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{m} A_{j,k} w_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} w_j \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} x_k \\
&= \left(A_{1,1}x_1 + \cdots + A_{1,n}x_n, \ldots, A_{m,1}x_1 + \cdots + A_{m,n}x_n\right)
\end{aligned}$$

这立即给出了我们想要的结果。■

习题 4 设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 且 $v_1, \ldots, v_m$ 是 V 中的一组向量，使得向量组 $Tv_1, \ldots, Tv_m$ 在 W 中是线性无关的。证明：向量组 $v_1, \ldots, v_m$ 是线性无关的。

证明 我们证明其逆否命题，即若 $v_1, \ldots, v_m$ 是线性相关的，则 $Tv_1, \ldots, Tv_m$ 也是线性相关的。现在假设 $v_1, \ldots, v_m$ 是线性相关的。

根据线性相关的定义（原书 2.17），存在 $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$，使得

$$a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = 0$$

其中 $a_1, \ldots, a_m$ 不全为 0。由于 T 是线性映射，根据线性映射将 0 映射到 0（原书 3.10），我们有

$$
\begin{aligned}
0 = T0 = T(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) \\
= a_1Tv_1 + \cdots + a_mTv_m
\end{aligned}
$$

这立即说明 $Tv_1, ..., Tv_m$ 是线性相关的。

一个命题成立，当且仅当其逆否命题成立。因此，原命题得证。■

习题 5 证明：$\mathcal{L}(V,W)$ 是向量空间，即原书 3.6 的结论。

证明 我们逐条验证 $\mathcal{L}(V,W)$ 满足向量空间的定义（原书 1.20）中的要求。

可交换性 对任意 $T,S \in \mathcal{L}(V,W)$，$T+S=S+T$。

证明：设 $v \in V$，则

$$
\begin{aligned}
(T+S)v &= Tv + Sv \\
&= Sv + Tv \\
&= (S+T)v
\end{aligned}
$$

因此 $T+S=S+T$。

可结合性 对任意 $T,S,R \in \mathcal{L}(V,W)$ 以及 $a,b \in \mathbb{F}$，都有 $(T+S)+R = T+(S+R)$，以及 $(ab)T = a(bT)$。

证明：设 $v \in V$，则对于加法的结合性，有

$$
\begin{aligned}
((T+S)+R)v &= (T+S)v + Rv \\
&= Tv + Sv + Rv \\
&= Tv + (S+R)v \\
&= Tv + Sv + Rv \\
&= (T+(S+R))v
\end{aligned}
$$

因此 $(T+S)+R = T+(S+R)$。另一方面，对于标量乘法的结合性，有

$$
\begin{aligned}
((ab)T)v &= (ab)(Tv) \\
&= a(b(Tv)) \\
&= a((bT)v) = (a(bT))v
\end{aligned}
$$

因此 $(ab)T = a(bT)$。

加法单位元 存在 $0 \in \mathcal{L}(V,W)$，使得对任意 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，$T+0=T$。

证明：取 $0: v \mapsto 0$，设 $v \in V$，则

$$
\begin{aligned}
(T+0)v &= Tv + 0v \\
&= Tv + 0 \\
&= Tv
\end{aligned}
$$

因此 $T+0=T$。

加法逆元 对任意 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，存在 $-T \in \mathcal{L}(V, W)$，使得 $T + (-T) = 0$。

证明：取 $-T : v \mapsto -Tv$，设 $v \in V$，则

$$(T + (-T))v = Tv + (-T)v = Tv - Tv = 0 = 0v$$

因此 $T + (-T) = 0$。

乘法单位元 对于任意 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，$1T = T$。

证明：设 $v \in V$，则

$$(1T)v = 1(Tv) = Tv$$

因此 $1T = T$。

分配性质 对于任意 $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$ 和 $a, b \in \mathbb{F}$，都有 $a(T + S) = aT + aS$，以及 $(a + b)T = aT + bT$。

证明：设 $v \in V$，则对于第一个分配性质，有

$$\begin{aligned}(a(T+S))v &= a((T+S)v) \\ &= a(Tv + Sv) \\ &= aTv + aSv \\ &= (aT + aS)v\end{aligned}$$

因此 $a(T + S) = aT + aS$。另一方面，对于第二个分配性质，有

$$\begin{aligned}((a+b)T)v &= (a+b)(Tv) \\ &= a(Tv) + b(Tv) \\ &= (aT)v + (bT)v \\ &= (aT + bT)v\end{aligned}$$

因此 $(a + b)T = aT + bT$。

■

习题 6 证明：线性映射的乘法具有可结合性、单位元和分配性质，即原书 3.8 的结论。

证明 我们逐条验证线性映射满足这些性质。

可结合性 对于任意使乘积有意义的线性映射 T_1，T_2 和 T_3（即 T_3 映射到 T_2 的定义空间中，T_2 映射到 T_1 的定义空间中），都有 $(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$。

证明：设 v 是 T_3 的定义空间中的任意向量，则

$$((T_1T_2)T_3)v = T_1(T_2(T_3v)) = (T_1(T_2T_3))v$$

因此 $(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$。

单位元 对于任意 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，都有 $TI = IT = T$。这里的第一个 I 是 V 上的恒等变换，而第二个 I 是 W 上的恒等变换。

证明：设 $v \in V$，对于 $IT = T$，有

$$(IT)v = I(Tv) = Tv$$

因此 $IT = T$。另一方面，对于 $TI = T$，

$$(TI)v = T(Iv) = Tv$$

因此 $TI = T$。

分配性质 对于任意 $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(U, V)$ 和 $S, S_1, S_2 \in \mathcal{L}(V, W)$，有 $(S_1 + S_2)T = S_1T + S_2T$ 且 $S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2$。

证明：设 $v \in U$，则对于第一个分配性质，有

$$\begin{aligned}((S_1 + S_2)T)v &= (S_1 + S_2)(Tv)\\ &= S_1(Tv) + S_2(Tv)\\ &= (S_1T + S_2T)v\end{aligned}$$

因此 $(S_1 + S_2)T = S_1T + S_2T$。另一方面，对于第二个分配性质，有

$$\begin{aligned}(S(T_1 + T_2))v &= S((T_1 + T_2)v)\\ &= S(T_1v + T_2v)\\ &= S(T_1v) + S(T_2v)\\ &= (ST_1 + ST_2)v\end{aligned}$$

因此 $S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2$。

综上所述，线性映射的乘法具有可结合性、单位元和分配性质。 ■

习题 7 证明：任何从一维向量空间到其自身的线性映射，就是标量乘法。形式化地说，即若 $\dim V = 1$ 且 $T \in \mathcal{L}(V)$，则存在 $\lambda \in \mathbb{F}$，使得 $Tv = \lambda v$ 对任意 $v \in V$ 成立。

证明 设 w 是 V 的一组基。由于 $Tw \in V$，根据基的性质，存在 $\lambda \in \mathbb{F}$，使得 $Tw = \lambda w$。现在考虑任意 $v \in V$。根据基的性质，存在唯一的 $a \in \mathbb{F}$，使得 $v = aw$。因此

$$Tv = T(aw) = aTw = a(\lambda w) = \lambda(aw) = \lambda v$$

综上所述，$Tv = \lambda v$ 对任意 $v \in V$ 成立。 ■

习题 8 给出一例：函数 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，使得对于任意 $a \in \mathbb{R}$ 和 $v \in \mathbb{R}^2$，有

$$\varphi(av) = a\varphi(v)$$

但是 φ 不是线性映射。

注 本题和下一题表明，仅有齐次性或仅有可加性，都不足以推导出一个函数是线性映射。

证明 对于任意 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，令

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}x & |x|\geq|y|\\ y & |x|<|y|\end{cases}$$

设 $a\in\mathbb{R}$，则当 $|x|\geq|y|$ 时，$\varphi(x,y)=x$，且有 $|ax|\geq|ay|$，于是

$$\varphi(a(x,y))=\varphi(ax,ay)=ax=a\varphi(x,y)$$

当 $|x|<|y|$ 时，$\varphi(x,y)=y$，且有 $|ax|<|ay|$，于是

$$\varphi(a(x,y))=\varphi(ax,ay)=ay=a\varphi(y)$$

因此，对于任意 $a\in\mathbb{R}$ 和 $v\in\mathbb{R}^2$，都有 $\varphi(av)=a\varphi(v)$。

另一方面, 注意到当 $v=(1,0)$ 和 $w=(0,-1)$ 时, $\varphi(v+w)=\varphi(1,-1)=1$, 而 $\varphi(v)+\varphi(w)=\varphi(1,0)+\varphi(0,-1)=1+(-1)=0$，即 $\varphi(v+w)\neq\varphi(v)+\varphi(w)$。

这说明 φ 不满足线性映射的定义（原书 3.1）中对可加性的要求。因此 φ 不是线性映射。■

习题 9 给出一例：函数 $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$，使得对于任意 $w,z\in\mathbb{C}$，有

$$\varphi(w+z)=\varphi(w)+\varphi(z)$$

但是 φ 不是线性映射。（此处将 $\mathbb{C}$ 视为复向量空间。）

注 满足上述可加性条件，而不是线性映射的函数 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 也是存在的。然而，证明这样的一个函数存在，要用到高得多的数学工具。[注1]

证明 设 $z\in\mathbb{C}$，令[注2]

$$\varphi(z)=\Re z$$

设 $w=(a+bi),z=(c+di)\in\mathbb{C}$，其中 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$。则

$$\varphi(w+z)=\Re((a+c)+(b+d)\mathrm{i})=a+c=\Re w+\Re z=\varphi(w)+\varphi(z)$$

因此，对于任意 $w,z\in\mathbb{C}$，都有 $\varphi(w+z)=\varphi(w)+\varphi(z)$。

另一方面，注意到

$$\varphi(\mathrm{i}2)=0\neq2\mathrm{i}=\mathrm{i}\varphi(2)$$

这说明 φ 不满足线性映射的定义（原书 3.1）中对齐次性的要求。因此 φ 不是的线性映射。■

[注1]这有很强的分析背景，感兴趣的读者可以搜索“柯西方程的不连续解”“哈默尔基“等关键词。明确构造出这样的函数一般而言需要承认选择公理，构造的基本思路是将 $\mathbb{R}$ 视为 $\mathbb{Q}$ 上的一个无限维向量空间。

[注2]这里的 $\Re z$ 表示 z 的实部，类似地，记号 $\Im z$ 表示 z 的虚部。

习题 10 证明或证伪：如果 $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$，$T : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 定义为 $Tp = q \circ p$，那么 T 是线性映射。

注 这里定义的函数 T，不同于原书 3.3 中最后一个例子定义的函数 T，区别在于复合的次序。

解答 设 $x \in \mathbb{R}$。令 $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 为 $x \mapsto x^2$。注意到，取 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 为 $x \mapsto x$，则

$$(T2p)(x) = q(2p(x)) = 4x^2 \neq 2x^2 = 2q(p(x)) = 2Tp$$

这说明 T 不满足线性映射的定义（原书 3.1）中对齐次性的要求。因此 T 不是线性映射。

习题 11 设 V 是有限维向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$。证明：T 是恒等算子的标量倍，当且仅当，对于任意 $S \in \mathcal{L}(V)$，$ST = TS$ 成立。

证明 首先，假设 $T = \lambda I$，其中 $\lambda \in \mathbb{F}$ 且 I 是 V 上的恒等算子。设 $v \in V$，则对于任意 $S \in \mathcal{L}(V)$，有

$$(ST)v = S(Tv) = S(\lambda v) = \lambda Sv = (\lambda I)(Sv) = (TS)v$$

这说明 $ST = TS$ 成立。

另一方面，我们说明逆否命题。假设不存在 $\lambda \in \mathbb{F}$，使得 $T = \lambda I$，即存在 $v \in V$，使得不存在 $\lambda \in \mathbb{F}$，使得 $Tv = \lambda v$。根据 2A 节习题 4（见第 29 页），我们得到 v, Tv 是一个线性无关组。

现在，我们构造一个线性映射 $S \in \mathcal{L}(V)$，使得 $Sv = v$ 且 $STv = v$。具体而言，根据每个线性无关组都可被扩充为基（原书 2.32），我们可以找到 $u_1, \dots, u_m \in V$，使得 $v, Tv, u_1, \dots, u_m$ 是 V 的一组基。

根据线性映射引理（原书 3.4），我们找到线性映射 $S : V \to V$，满足 $Sv = v$，$S(Tv) = v$，且对于 $j \in \{1, \dots, m\}$，$Su_j = u_j$。注意到

$$STv = v \neq Tv = TSv$$

这说明 $ST \neq TS$。综上所述，T 是恒等算子的标量倍，当且仅当，对于任意 $S \in \mathcal{L}(V)$，$ST = TS$ 成立。■

习题 12 设 U 是 V 的子空间，$U \neq V$。设 $S \in \mathcal{L}(U, W)$，且 $S \neq 0$（即存在 $u \in U$，使得 $Su \neq 0$）。定义 $T : V \to W$，使得

$$Tv = \begin{cases} Sv & v \in U \\ 0 & v \in V \quad \wedge \quad v \notin U \end{cases}$$

证明：T 不是 V 上的线性映射。

证明 设 $u \in U$，使得 $Su \neq 0$，$v \in V$ 且 $v \notin V$。由于 $u + (v - u) = v \notin U$，根据子空间的条件（原书 1.34）中对加法封闭性的要求，只能有 $v - u \notin U$。注意到

$$Tu = Su \neq 0 = 0 + 0 = Tu + T(v - u)$$

这说明 T 不满足线性映射的定义（原书 3.1）中对可加性的要求。因此 T 不是 V 上的线性映射。■

习题 13 设 V 是有限维的向量空间。证明: V 的子空间上的任意一个线性映射都可以扩充为 V 上的线性映射。形式化地说，设 U 是 V 的子空间，$S \in \mathcal{L}(U, W)$。则存在 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，使得 $Tu = Su$ 对任意 $u \in U$ 成立。

注 原书 3.125 的证明将会用到本题的结果。

证明 设 $v_1, ..., v_m$ 是 U 的一组基，根据每一个线性无关组都可被扩充为基（原书 2.32），我们可以找到 $v_{m+1}, ..., v_n \in V$，使得 $v_1, ..., v_n$ 是 V 的一组基。

现在，根据线性映射引理（原书 3.4），我们可以找到线性映射 $T : V \to W$，使得对于任意 $i \in \{1, ..., m\}$，都有 $Tv_i = Sv_i$，且对于 $j \in \{m + 1, ..., n\}$，$Tv_j = 0$。对于任意 $u \in U$，由于 u 可以唯一地表示为

$$u = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$$

因此

$$Tu = a_1Tv_1 + \cdots + a_mTv_m = a_1Sv_1 + \cdots + a_mSv_m = Su$$

综上所述，T 满足 $Tu = Su$ 对任意 $u \in U$ 成立，即 T 是 S 的扩充。■

习题 14 设 V 是有限维向量空间, $\dim V > 0$, W 是无限维向量空间。证明: $\mathcal{L}(V, W)$ 是无限维的。

证明 设 $v \in V$，$v \neq 0$。根据 2A 节习题 17（见第 37 页），W 中存在一个序列 $w_1, w_2, ...$ 使得对于任意 $m \in \mathbb{N}^+$，向量组 $w_1, ..., w_m$ 线性无关。

根据线性映射引理（原书 3.4），我们可以找到线性映射 $S_k : \operatorname{span}(v) \to W$，使得 $S_kv = w_k$。然后根据习题 13，存在 $T_k \in \mathcal{L}(V, W)$，使得对于任意 $u \in \operatorname{span}(v)$，都有 $T_ku = S_ku$。

对于任意 $m \in \mathbb{N}^+$，设 $a_1, ...a_m \in \mathbb{F}$，使得

$$a_1T_1 + \cdots + a_mT_m = 0$$

等式两边同时代入 v，我们得到

$$a_1w_1 + \cdots + a_mw_m = 0$$

由于 $w_1, ..., w_m$ 是线性无关的，因此 $a_1 = \cdots = a_m = 0$。这说明 $T_1, ..., T_m$ 是线性无关的。

所以，根据 2A 节习题 17（见第 37 页），$\mathcal{L}(V, W)$ 是无限维的。■

习题 15 设 $v_1, ..., v_m$ 是 V 中的线性相关向量组，$\dim W > 0$。证明：存在 $w_1, ..., w_m \in W$，使得不存在 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 对于任意 $k \in \{1, ..., m\}$，都有 $Tv_k = w_k$。

证明 由于向量组 $v_1, ..., v_m$ 是线性相关的，根据线性相关性引理（原书 2.19），存在 $k \in \{1, ..., m\}$，使得 $v_k \in \operatorname{span}(v_1, ..., v_{k-1})$。设

$$v_k = a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1}$$

其中 $a_1, ..., a_{k-1} \in \mathbb{F}$。任取 $w_k \neq 0$，并令 $w_1 = \cdots = w_{k-1} = 0$。于是

$$Tv_k = a_1 Tv_1 + \cdots + a_{k-1} Tv_{k-1} = 0 \neq w_k$$

这说明不存在 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，使得对于任意 $k \in \{1, ..., m\}$，都有 $Tv_k = w_k$。 ■

习题 16 设 V 是有限维向量空间，$\dim V > 1$。证明：存在 $S, T \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $ST \neq TS$。

证明 设 $v_1, v_2 \in V$ 是线性无关的向量组，令 $U = \operatorname{span}(v_1, v_2)$。设 $u \in U$，则 u 可以唯一地表示为

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

其中 $a_1, a_2 \in \mathbb{F}$。根据线性映射引理（原书 3.4），我们可以找到线性映射 $S|_U : U \to W$ 和 $T|_U : U \to W$[注3]，使得 $S|_U(v_1) = v_2$ 且 $S|_U(v_2) = v_1$，以及 $T|_U(v_1) = T|_U(v_2) = v_1$。

现在，根据习题 13，存在 $S, T \in \mathcal{L}(V)$，使得对于任意 $u \in U$，都有 $Su = S|_U(u)$ 且 $Tu = T|_U(u)$。注意到

$$STv_2 = Sv_1 = v_2 \neq v_1 = Tv_1 = TSv_2$$

于是 $ST \neq TS$，这立即完成了证明。 ■

习题 17 设 V 是有限维向量空间。

- $\mathcal{L}(V)$ 的子空间 $\mathcal{E}$ 被称为**双边理想（two-sided ideal）**，是指 $TE \in \mathcal{E}$ 和 $ET \in \mathcal{E}$，对于任意 $E \in \mathcal{E}$ 和 $T \in \mathcal{L}(V)$ 都成立。

证明：$\mathcal{L}(V)$ 仅有的双边理想是 $\{0\}$ 和 $\mathcal{L}(V)$。

证明 验证 $\{0\}$ 是 $\mathcal{L}(V)$ 的双边理想是平凡的。现在假设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{L}(V)$ 的双边理想，且 $\mathcal{E} \neq \{0\}$。故存在 $E \in \mathcal{E}$ 使得 $E \neq 0$，即可设 $w_0 \in V$，使得 $Ew_0 \neq 0$。令 $w = Ew_0$。

令 $W = \operatorname{span}(w)$。根据线性映射引理（原书 3.4），可以找到线性映射[注4] $R|_W : W \to \mathbb{F}$，满足 $R|_W(w) = 1$。再根据习题 13，存在线性映射 $R \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$，使得 $Rw = R|_W(w) = 1$。

[注3] 这里使用的是限制算子的记号，表示定义域限制在 U 上，原书第三版的 5.14 定义了此记号。但是这里无需明白这些定义，将其分别当作两个函数的名字即可。

[注4] 这里有时将 $\mathbb{F}$ 视为一个向量空间，即我们不对 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{F}^1$ 进行明确地区分。

现在，对于任意 $u \in W$ 和 $f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$，定义

- 线性映射 $S_u : V \to V$ 为 $v \mapsto R(v)u$；
- 线性映射 $T_f : V \to V$ 为 $v \mapsto f(v)w_0$。

由于 $\mathcal{E}$ 是双边理想，$S_u E T_f \in \mathcal{E}$。设 $u_1, \ldots, u_m$ 是 V 的一组基。另一方面，设 $v \in V$，注意到

$$\begin{aligned}(S_u E T_f)v &= S_u(E(f(v)w_0)) \\ &= S_u(f(v)Ew_0) \\ &= f(v)S_u w \\ &= f(v)R(w)u \\ &= f(v)u\end{aligned}$$

现在，设 $T \in \mathcal{L}(V)$, $i, j \in \{1, \ldots, m\}$。我们将 Tu_j 表示为 $Tu_j = A_{1,j}u_1 + \cdots + A_{m,j}u_m$，其中 $A_{i,j} \in \mathbb{F}$。同时，将 v 表示为 $v = a_1u_1 + \cdots + a_mu_m$，其中 $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$。

现在，对于任意 $i \in \{1, \ldots, m\}$，根据线性映射引理（原书 3.4），我们可以找到线性映射 $f_i \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$，使得对于任意 $j \in \{1, \ldots, m\}$，$f_i(v_j) = A_{i,j}$，即

$$f_i(v) = \sum_{j=1}^{m} A_{i,j}a_j$$

注意到

$$\begin{aligned}Tv &= \sum_{j=1}^{m} a_j Tu_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_j \sum_{i=1}^{m} A_{i,j}u_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{m} A_{i,j}a_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(v) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (S_{u_i} E T_{f_i})v\end{aligned}$$

这说明

$$T = \sum_{i=1}^{m} S_{u_i} E T_{f_i} \in \mathcal{E}$$

由于 T 是任意的，因此 $\mathcal{E}$ 包含了所有的线性映射，即 $\mathcal{E} = \mathcal{L}(V)$。综上所述，$\mathcal{L}(V)$ 仅有的双边理想是 $\{0\}$ 和 $\mathcal{L}(V)$。■

3B 零空间和值域

习题 1 给出一例：满足 $\dim \operatorname{null} T = 3$ 且 $\dim \operatorname{range} T = 2$ 的线性映射 T。

解答 令

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^5 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &\mapsto (x_1, x_2) \end{aligned}$$

根据定义

$$\begin{aligned} \operatorname{range} T &= \mathbb{R}^2 \\ \operatorname{null} T &= \left\{(0, 0, x, y, z) \in \mathbb{R}^5 : x, y, z \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

于是 $\dim \operatorname{null} T = 3$ 且 $\dim \operatorname{range} T = 2$。

习题 2 设 $S, T \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $\operatorname{range} S \subseteq \operatorname{null} T$，证明：$(ST)^2 = 0$。

证明 设 $v \in V$。考虑到 $S(Tv) \in \operatorname{range} S \subseteq \operatorname{null} T$，根据定义，$TSTv = 0$。根据线性映射将 0 映射到 0（原书 3.10），

$$(ST)^2 v = S(TST)v = S0 = 0$$

因此 $(ST)^2 = 0$。■

习题 3 设向量组 $v_1, \ldots, v_m \in V$，定义 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^m, V)$ 为

$$(z_1, \ldots, z_m) \mapsto z_1 v_1 + \cdots + z_m v_m$$

(a) T 的什么性质对应于向量组 $v_1, \ldots, v_m$ 张成 V?
(b) T 的什么性质对应于向量组 $v_1, \ldots, v_m$ 线性无关?

解答 对于 (a)，结论是 T 是满射等价于向量组 $v_1, \ldots, v_m$ 张成 V。我们使用逆否命题来说明这一点。首先假设 T 不是满射，则存在 $w \in V$ 使得 $w \notin \operatorname{range} T$。反证假设向量组 $v_1, \ldots, v_m$ 张成 V，则存在 $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{F}$ 使得 $w = z_1 v_1 + \cdots + z_m v_m$。因此 $w \in \operatorname{range} T$，这与 $w \notin \operatorname{range} T$ 矛盾。

现在假设向量组 $v_1, \ldots, v_m$ 不张成 V，则 $\dim V > \dim \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m) = m$，然而 $\dim \mathbb{F}^m = m$，根据映射到更高维空间上的线性映射不是满射（原书 3.24），T 不是满射。

对于 (b)，结论是 T 是单射等价于向量组 $v_1, \ldots, v_m$ 线性无关。首先假设 T 是单射，则根据“单射性 $\iff$ 零空间为 $\{0\}$”（原书 3.15），$\operatorname{null} T = \{0\}$。因此 $z_1 v_1 + \cdots + z_m v_m = 0$ 仅当 $z_1 = \cdots = z_m = 0$，这说明向量组 $v_1, \ldots, v_m$ 线性无关。

现在假设向量组 $v_1, ..., v_m$ 线性无关。则 $\dim \operatorname{range} T = \dim \operatorname{span}(v_1, ..., v_m) = m$，根据线性映射基本定理（原书 3.21），$\dim \mathbb{F}^m = \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{range} T$，解得 $\dim \operatorname{null} T = \{0\}$，即 T 是单射。

习题 4 证明：$\{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4) : \dim \operatorname{null} T > 2\}$ 不是 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$ 的子空间。

证明 记 $S = \{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4) : \dim \operatorname{null} T > 2\}$。取 $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$，使得对于任意 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$，有

$$T_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, x_2, 0, 0)$$
$$T_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, x_3, x_4)$$

容易验证 $\dim \operatorname{null} T_1 = \dim \operatorname{null} T_2 = 3 > 2$，即 T_1 和 T_2 都是 S 中的元素。然而，注意到 $\dim \operatorname{range}(T_1 + T_2) = 4$，即根据线性映射基本定理（原书 3.21），

$$\dim \operatorname{null}(T_1 + T_2) = \dim \mathbb{R}^5 - \dim \operatorname{range}(T_1 + T_2) = 5 - 4 = 1$$

因此 $T_1 + T_2 \notin S$。这说明 S 违反了子空间的条件（原书 1.34）中对加法封闭性的要求，故 S 不是 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$ 的子空间。■

习题 5 给出一例：线性映射 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$，满足 $\operatorname{range} T = \operatorname{null} T$。

解答 设 $v_1, ..., v_4$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的一组基。根据线性映射引理（原书 3.4），存在 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$，使得 $Tv_1 = Tv_2 = 0$，$Tv_3 = v_1$，$Tv_4 = v_2$。因此

$$\operatorname{range} T = \operatorname{null} T = \operatorname{span}(v_1, v_2)$$

因此 T 满足题目要求。

习题 6 证明：不存在 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$，使得 $\operatorname{range} T = \operatorname{null} T$。

证明 假设存在 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$，使得 $\operatorname{range} T = \operatorname{null} T$。根据线性映射基本定理（原书 3.21），有

$$\dim \mathbb{R}^5 = \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{range} T$$

由于 $\operatorname{range} T = \operatorname{null} T$，因此 $\dim \operatorname{range} T = \dim \operatorname{null} T$。设 $\dim \operatorname{range} T = n$，则

$$\dim \mathbb{R}^5 = n + n = 2n$$

由于 $\dim \mathbb{R}^5 = 5$，因此 $2n = 5$，这与 n 是整数矛盾。因此不存在这样的 T。■

习题 7 设 V 和 W 是有限维向量空间，$2 \le \dim V \le \dim W$。证明：$\{T \in \mathcal{L}(V, W) :$ T 不是单射$\}$ 不是 $\mathcal{L}(V, W)$ 的子空间。

证明 记 $S=\{T\in\mathcal{L}(V,W): T$ 不是单射$\}$。设 $v_1,\dots,v_m$ 是 V 的一组基，$w_1,\dots,w_n$ 是 W 的一组基，其中 $n\geq m=\dim V\geq 2$。

根据线性映射引理（原书 3.4），存在 $T\in\mathcal{L}(V,W)$，使得对于任意 $i\in\{1,\dots,m\}$，有 $Tv_i=w_i$。设 $v\in V$。假设 $Tv=0$，将 v 表示为 $v=z_1v_1+\cdots+z_mv_m$，其中 $z_1,\dots,z_m\in\mathbf{F}$。则

$$Tv=z_1Tv_1+\cdots+z_mTv_m=z_1w_1+\cdots+z_mw_m=0$$

由于 $w_1,\dots,w_m$ 是线性无关的，因此 $z_1=\cdots=z_m=0$，即 $v=0$。因此 $\operatorname{null}T=\{0\}$，根据“单射性 $\Longleftrightarrow$ 零空间为 $\{0\}$”（原书 3.15），T 是单射，即 $T\notin S$。

再次利用线性映射引理（原书 3.4），存在 $R\in\mathcal{L}(V,W)$，使得 $Rv_1=w_1$，且对于任意 $i\in\{2,\dots,m\}$，$Rv_i=0$。由于 $m\geq 2$，我们至少有 $Rv_2=R0=0$，故 R 不是单射。

注意到

$$(T-R)v_1=Tv_1-Rv_1=w_1-w_1=0=(T-R)0$$

故 $T-R$ 不是单射。即 $R,T-R\in S$，注意到

$$R+(T-R)=T\notin S$$

这说明 S 违反了子空间的条件（原书 1.34）中对加法封闭性的要求，故 S 不是 $\mathcal{L}(V,W)$ 的子空间。■

习题 8 设 V 和 W 是有限维向量空间，$2\leq\dim W\leq\dim V$。证明：$\{T\in\mathcal{L}(V,W):T$ 不是满射$\}$ 不是 $\mathcal{L}(V,W)$ 的子空间。

证明 记 $S=\{T\in\mathcal{L}(V,W): T$ 不是满射$\}$。设 $v_1,\dots,v_m$ 是 V 的一组基，$w_1,\dots,w_n$ 是 W 的一组基，其中 $m\geq n=\dim W\geq 2$。

根据线性映射引理（原书 3.4），存在 $T\in\mathcal{L}(V,W)$，使得对于任意 $i\in\{1,\dots,n\}$，有 $Tv_i=w_i$，且对于任意 $i\in\{n+1,\dots,m\}$，$Tv_i=0$。设 $w\in W$。将 w 表示为 $w=z_1w_1+\cdots+z_nw_n$，其中 $z_1,\dots,z_m\in\mathbf{F}$。则

$$w=z_1Tv_1+\cdots+z_nTv_n=T(z_1v_1+\cdots+z_nv_n)$$

故 $\operatorname{range}T=W$，即 T 是满射，因此 $T\notin S$。

再次利用线性映射引理（原书 3.4），存在 $R\in\mathcal{L}(V,W)$，使得 $Rv_1=w_1$，且对于任意 $i\in\{2,\dots,n\}$，$Rv_i=0$。由于 $n\geq 2$，w_1,w_2 线性无关，根据 2A 节习题 4（见第 29 页），不存在 $\lambda\in\mathbf{F}$，使得 $w_2=\lambda w_1$，即 $w\notin\operatorname{range}R$，故 R 不是满射。

反证假设 $T-R$ 是满射，则存在 $v\in V$ 使得 $(T-R)v=w_1$。将 v 表示为 $v=a_1v_1+\cdots+a_mv_m$，其中 $a_1,\dots,a_m\in\mathbf{F}$。则

$$\begin{aligned} w_1 = (T-R)v = Tv - Rv \\ &= a_1Tv_1 + \cdots + a_mTv_m + a_1Rv_1 + \cdots + a_mRv_m \\ &= a_1w_1 + \cdots + a_nw_n - a_1w_1 \\ &= a_2w_2 + \cdots + a_nw_n \in \operatorname{span}(w_2, \dots, w_m) \end{aligned}$$

根据 2A 节习题 13（见第 33 页），$w_2, \dots, w_n, w_1$ 不是线性无关的，矛盾。故 $T-R$ 不是满射。现在 $R, T-R \in S$，注意到

$$R + (T-R) = T \notin S$$

这说明 S 违反了子空间的条件（原书 1.34）中对加法封闭性的要求，故 S 不是 $\mathcal{L}(V,W)$ 的子空间。■

习题 9 设 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 是单射，向量组 $v_1, \dots, v_n$ 在 V 中线性无关。证明：向量组 $Tv_1, \dots, Tv_n$ 在 W 中线性无关。

证明 设 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ 使得

$$a_1Tv_1 + \cdots + a_nTv_n = 0$$

根据线性映射的定义，有

$$T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = 0$$

由于 T 是单射，根据“单射性 $\Longleftrightarrow$ 零空间为 $\{0\}$”（原书 3.15），$\operatorname{null} T = \{0\}$，因此 $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$。由于向量组 $v_1, \dots, v_n$ 在 V 中线性无关，只能有 $a_1 = \cdots = a_n = 0$。

这说明向量组 $Tv_1, \dots, Tv_n$ 在 W 中线性无关。■

习题 10 设向量组 $v_1, \dots, v_n$ 张成 V，$T \in \mathcal{L}(V,W)$，证明：$Tv_1, \dots, Tv_n$ 张成 $\operatorname{range} T$。

证明 设 $w \in \operatorname{range} T$，则可设 $v \in V$，使得 $Tv = w$。将 v 表示为 $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$，其中 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$。则

$$w = Tv = T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_1Ta_1 + \cdots + a_nTa_n$$

这说明 w 可以表示为向量组 $Tv_1, \dots, Tv_n$ 的线性组合，根据张成的定义（原书 2.7），可得 $Tv_1, \dots, Tv_n$ 张成 $\operatorname{range} T$。■

习题 11 设 V 是有限维向量空间，$T \in \mathcal{L}(V,W)$。证明：存在 V 的子空间 U，使得

$$U \cap \operatorname{null} T = \{0\} \qquad \wedge \qquad \operatorname{range} T = \{Tu : u \in U\}$$

证明 设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基，则根据习题 10，$Tv_1, \dots, Tv_n$ 张成 $\operatorname{range} T$。在根据“每个张成组都包含基”（原书 2.30），不妨设 $Tv_1, \dots, Tv_m$ 是 $\operatorname{range} T$ 的一组基。

令 $U = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m)$。将 T 视作 $U \to W$ 的线性映射，则根据习题 10，$\operatorname{range} T = \{Tu : u \in U\}$。现在证明 $U \cap \operatorname{null} T = \{0\}$。设 $u \in U \cap \operatorname{null} T$，则存在 $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$，使得

$$u = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m$$

由于 $u \in \operatorname{null} T$，根据线性映射的定义，有

$$0 = Tu = a_1 T v_1 + \cdots + a_m T v_m$$

由于 $Tv_1, \dots, Tv_m$ 是线性无关的，故 $a_1 = \cdots = a_m = 0$，即 $u = 0$。因此 $U \cap \operatorname{null} T = \{0\}$。■

习题 12 设 T 是 $\mathbb{F}^4 \to \mathbb{F}^2$ 的线性映射，且

$$\operatorname{null} T = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}^4 : x_1 = 5x_2 \wedge x_3 = 7x_4\right\}$$

证明：T 是满射。

证明 注意到，取

$$v_1 = (5, 1, 0, 0)$$
$$v_2 = (0, 0, 7, 1)$$

则 $\operatorname{null} T = \operatorname{span}(v_1, v_2)$，因此 $\dim \operatorname{null} T = 2$。根据线性映射基本定理（原书 3.21），

$$\dim \mathbb{F}^4 = \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{range} T$$

解得 $\dim \operatorname{range} T = 2$，即 $\dim \operatorname{range} T = \dim \mathbb{F}^2$，根据“某空间中与之维数相同的子空间即为该空间本身”（原书 2.39），$\operatorname{range} T = \mathbb{F}^2$，即 T 是满射。■

习题 13 设 U 是 $\mathbb{R}^8$ 的 3 维子空间，T 是 $\mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^5$ 的线性映射，使得 $\operatorname{null} T = U$。证明：$T$ 是满射。

证明 根据线性映射基本定理（原书 3.21），有

$$\dim \mathbb{R}^8 = \dim U + \dim \operatorname{range} T$$

解得 $\dim \operatorname{range} T = 5$。根据“某空间中与之维数相同的子空间即为该空间本身”（原书 2.39），$\operatorname{range} T = \mathbb{R}^5$，即 T 是满射。■

习题 14 证明：不存在 $\mathbb{F}^5 \to \mathbb{F}^2$ 的线性映射，使得其零空间等于

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{F}^5 : x_1 = 3x_2 \wedge x_3 = x_4 = x_5\right\}$$

证明 假设这样的线性映射 T 存在。注意到，取

$$v_1 = (3, 1, 0, 0, 0)$$
$$v_2 = (0, 0, 1, 1, 1)$$

则 $\operatorname{null} T = \operatorname{span}(v_1, v_2)$，因此 $\dim \operatorname{null} T = 2$。根据线性映射基本定理（原书 3.21），

$$\dim \mathbb{F}^5 = \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{range} T$$

解得 $\dim \operatorname{range} T = 3$，然而 $\dim \mathbb{F}^2 = 2$，根据“子空间的维数不超过该空间的维数”（原书 2.37），$\operatorname{range} T \subseteq \mathbb{F}^2$，因此 $\dim \operatorname{range} T \leq \dim \mathbb{F}^2 = 2$，矛盾。因此不存在这样的线性映射。■

习题 15 设 V 上存在一个线性映射，使得其零空间和值域都是有限维的，证明：V 是有限维的。

证明 设 $T \in \mathcal{L}(V)$，使得 $\dim \operatorname{null} T = m$ 且 $\dim \operatorname{range} T = n$。进一步可设 $u_1, ..., u_m$ 是 $\operatorname{null} T$ 的一组基，$Tv_1, ..., Tv_n$ 是 $\operatorname{range} T$ 的一组基，其中 $v_1, ..., v_n \in V$。

设 $w \in V$，则 $Tw \in \operatorname{range} T$，因此存在 $a_1, ..., a_n \in \mathbb{F}$，使得

$$Tw = a_1 Tv_1 + \cdots + a_n Tv_n = T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n)$$

记 $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$，则 $T(w - v) = 0$，故 $w - v \in \operatorname{null} T$，即存在 $b_1, ..., b_m \in \mathbb{F}$，使得

$$w - v = b_1 u_1 + \cdots + b_m u_m$$

这说明 w 可以表示为

$$w = (a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) + (b_1 u_1 + \cdots + b_m u_m)$$

即 $w \in \operatorname{span}(u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n)$。$V$ 可以被有限个向量张成，因此 V 是有限维的。■

习题 16 设 V 和 W 都是有限维向量空间，证明：存在 $V \to W$ 的单的线性映射，当且仅当 $\dim V \leq \dim W$。

证明 首先假设存在 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是单射。根据“单射性 $\Longleftrightarrow$ 零空间为 $\{0\}$”（原书 3.15），$\operatorname{null} T = \{0\}$，因此 $\dim \operatorname{null} T = 0$。根据线性映射基本定理（原书 3.21），有

$$\dim V = \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{range} T = \dim \operatorname{range} T$$

由于 $\operatorname{range} T \subseteq W$，根据子空间的维数（原书 2.37），$\dim \operatorname{range} T \leq \dim W$，因此 $\dim V \leq \dim W$。

现在假设 $\dim V \leq \dim W$。设 $v_1, ..., v_n$ 是 V 的一组基，$w_1, ..., w_n$ 是 W 上的一个线性无关组。根据线性映射引理（原书 3.4），存在 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，使得对于任意 $i \in \{1, ..., n\}$，有 $Tv_i = w_i$。

设 $v \in V$，使得 $Tv = 0$。将 v 表示为 $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$，其中 $a_1, ..., a_n \in \mathbb{F}$。则

$$0 = Tv = a_1 Tv_1 + \cdots + a_n Tv_n = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$$

由于 $w_1, \dots, w_n$ 是线性无关的，故 $a_1 = \cdots = a_n = 0$，即 $v = 0$。因此 $\operatorname{null} T = \{0\}$，根据“单射性 $\Longleftrightarrow$ 零空间为 $\{0\}$”（原书 3.15），T 是单射。■

习题 17 设 V 和 W 都是有限维向量空间，证明：存在 $V \to W$ 的满的线性映射，当且仅当 $\dim V \geq \dim W$。

证明 首先假设存在 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是满射。根据线性映射基本定理（原书 3.21），有

$$\dim V = \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{range} T$$

由于 $\operatorname{range} T = W$，因此 $\dim \operatorname{range} T = \dim W$，解得 $\dim V = \dim \operatorname{null} T + \dim W \geq \dim W$。

现在假设 $\dim V \geq \dim W$。设 $w_1, \dots, w_n$ 是 W 的一组基，$v_1, \dots, v_n$ 是 V 上的一个线性无关向量组。根据线性映射引理（原书 3.4），存在 $S \in \mathcal{L}(\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n), W)$，使得对于任意 $i \in \{1, \dots, n\}$，有 $Sv_i = w_i$。进一步，根据 3A 节习题 13（见第 69 页），存在 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，使得对于任意 $v \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n)$，有 $Tv = Sv$。

设 $w \in W$，则可以将 w 表示为 $w = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$，其中 $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{F}$。则

$$w = a_1 T v_1 + \cdots + a_n T v_n = T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n)$$

这说明对于任意 $w \in W$，都存在一个向量在 V 中，使得其通过 T 映射到该向量。因此 T 是满射。■

习题 18 设 V 和 W 都是有限维向量空间，U 是 V 的子空间。证明：存在 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，使得 $\operatorname{null} T = U$ 当且仅当 $\dim U \geq \dim V - \dim W$。

证明 首先假设存在 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，使得 $\operatorname{null} T = U$。根据线性映射基本定理（原书 3.21），有

$$\dim V = \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{range} T$$

由于 $\operatorname{null} T = U$，因此 $\dim \operatorname{null} T = \dim U$。由于 $\operatorname{range} T \subseteq W$，根据子空间的维数（原书 2.37），$\dim \operatorname{range} T \leq \dim W$，因此

$$\dim V \leq \dim U + \dim W$$

解得 $\dim U \geq \dim V - \dim W$。

现在假设 $\dim U \geq \dim V - \dim W$。设 $u_1, \dots, u_m$ 是 U 的一组基。根据“每个线性无关组都可以扩展为基”（原书 2.31），存在 $v_1, \dots, v_n \in V$，使得向量组 $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基。其中 $m = \dim U$，$n = \dim V - \dim U$。由于 $\dim U \geq \dim V - \dim W$，解得 $n \leq \dim W$。

设 $w_1, \dots, w_n \in W$ 是线性无关组，根据线性映射引理（原书 3.4），存在 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，使得对于任意 $i \in \{1, \dots, m\}$，有 $Tu_i = 0$，且对于任意 $i \in \{1, \dots, n\}$，有 $Tv_i = w_i$。

设 $v \in \operatorname{null} T$，则存在 $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbf{F}$，使得

$$v = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m + b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$$

其中

$$0 = Tv = b_1 T v_1 + \cdots + b_n T v_n = b_1 w_1 + \cdots + b_n w_n$$

由于 $w_1, \dots, w_n$ 是线性无关的，故 $b_1 = \cdots = b_n = 0$，即 $v \in U$。因此 $\operatorname{null} T \subseteq U$。另一方面，显然 $U \subseteq \operatorname{null} T$，因此 $\operatorname{null} T = U$。■

习题 19 设 W 是有限维向量空间，$T \in \mathcal{L}(V, W)$。证明：T 是单射，当且仅当，存在 $S \in \mathcal{L}(W, V)$，使得 ST 是 V 上的恒等映射。

证明 首先假设 T 是单射。根据值域是子空间（原书 3.18），$\operatorname{range} T$ 是 W 的子空间，进一步根据子空间的维数（原书 2.37），可得 $\operatorname{range} T$ 是有限维的。设 $Tu_1, \dots, Tu_n$ 是 $\operatorname{range} T$ 的一组基，其中 $u_1, \dots, u_n \in V$。

设 $u \in V$，则可以将 Tu 表示为

$$Tu = a_1 T u_1 + \cdots + a_n T u_n = T(a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n)$$

其中 $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{F}$。根据单射的定义（原书 3.14），$T$ 是单射，因此 $u \in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_n)$。因此向量组 $u_1, \dots, u_n$ 张成 V。故 V 是有限维向量空间。

故可设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基。对于 $i \in \{1, \dots, n\}$，令 $w_i = T v_i$。根据习题 9，$w_1, \dots, w_n$ 是线性无关的。

根据线性映射引理（原书 3.4），存在 $R \in \mathcal{L}(\operatorname{span}(w_1, \dots, w_n), V)$，使得对于任意 $i \in \{1, \dots, n\}$，有 $R w_i = v_i$。进一步，根据 3A 节习题 13（见第 69 页），存在 $S \in \mathcal{L}(W, V)$，使得对于任意 $w \in \operatorname{span}(w_1, \dots, w_n)$，有 $Sw = Rw$。

设 $v \in V$，则可以将 v 表示为 $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$，其中 $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{F}$。则

$$\begin{aligned} STv &= S(a_1 T v_1 + \cdots + a_n T v_n) \\ &= S(a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n) \\ &= a_1 S w_1 + \cdots + a_n S w_n \\ &= a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = v \end{aligned}$$

这说明 ST 确实是 V 上的恒等映射。

现在假设存在 $S \in \mathcal{L}(W, V)$，使得 ST 是 V 上的恒等映射。设 $v \in \operatorname{null} T$，根据"线性映射将 0 映射到 0"（原书 3.10），有

$$v = STv = S0 = 0$$

这说明 $\operatorname{null} T = \{0\}$，根据"单射性 $\Longleftrightarrow$ 零空间为 $\{0\}$"（原书 3.15），T 是单射。■

习题 20 设 W 是有限维的向量空间，$T \in \mathcal{L}(V,W)$。证明：T 是满射，当且仅当，存在 $S \in \mathcal{L}(W,V)$，使得 TS 是 W 上的恒等映射。

证明 首先假设 T 是满射。令 $n = \dim W$。如果 V 是有限维的，则根据“映射到更高维空间上的线性映射不是满射”（原书 3.24）的逆否命题，$\dim V \geq \dim W$。因此可设 $v_1, ..., v_n$ 是 V 上的一个线性无关向量组。如果 V 是无限维的，自然也可以取 $v_1, ..., v_n$ 为 V 上的线性无关向量组。

现在对于 $i \in \{1, ..., n\}$，令 $w_i = Tv_i$。根据习题 9，$w_1, ..., w_n$ 是线性无关的。进一步，根据“长度恰当的线性无关组是基”（原书 2.38），$w_1, ..., w_n$ 是 W 的一组基。于是，根据线性映射引理（原书 3.4），存在 $S \in \mathcal{L}(W,V)$，使得对于任意 $i \in \{1, ..., n\}$，有 $Sw_i = v_i$。

设 $w \in W$，则可以将 w 表示为 $w = a_1w_1 + \cdots + a_nw_n$，其中 $a_1, ..., a_n \in \mathbb{F}$。则

$$\begin{aligned} TSw &= T(a_1Sw_1 + \cdots + a_nSw_n) \\ &= T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) \\ &= a_1Tv_1 + \cdots + a_nTv_n \\ &= a_1w_1 + \cdots + a_nw_n = w \end{aligned}$$

这说明 TS 确实是 W 上的恒等映射。

现在假设存在 $S \in \mathcal{L}(W,V)$，使得 TS 是 W 上的恒等映射。设 $w \in W$，则可取 $v = Sw \in V$，使得 $Tv = TSw = w$。这说明对于任意 $w \in W$，都存在一个向量在 V 中，使得其通过 T 映射到该向量。因此 T 是满射。■

习题 21 设 V 是有限维向量空间，$T \in \mathcal{L}(V,W)$，U 是 W 的子空间。证明：$\{v \in V : Tv \in U\}$ 是 V 的子空间，且

$$\dim\{v \in V : Tv \in U\} = \dim \operatorname{null} T + \dim(U \cap \operatorname{range} T)$$

证明 记 $V_U = \{v \in V : Tv \in U\}$。为了说明 V_U 是 V 的子空间，我们逐条验证“子空间的条件”（原书 1.34）中给出的要求：

加法单位元 $0 \in V_U$。
证明：根据“线性映射将 0 映射到 0”（原书 3.10），有 $T0 = 0 \in U$，因此 $0 \in V_U$。

加法封闭性 $u, w \in V_U$ 意味着 $u + w \in V_U$。
证明：设 $u, w \in V_U$，则 $Tu \in U$ 且 $Tw \in U$。因此 $T(u + w) = Tu + Tw \in U$，即 $u + w \in V_U$。

乘法封闭性 $\lambda \in \mathbb{F}$ 且 $v \in V_U$ 意味着 $\lambda v \in V_U$。
证明：设 $v \in V_U$，则 $Tv \in U$。因此 $T(\lambda v) = \lambda Tv \in U$，即 $\lambda v \in V_U$。

这说明 V_U 是 V 的子空间。

现在证明 $\dim V_U = \dim \operatorname{null} T + \dim(U \cap \operatorname{range} T)$。设 $v_1, \dots, v_m$ 是 V_U 的一组基，根据“每个线性无关组都可以扩展为基”（原书 2.31），存在 $v_{m+1}, \dots, v_n \in V$，使得向量组 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基。

根据线性映射引理（原书 3.4），存在 $T|_{V_U} \in \mathcal{L}(V_U, U)$，使得对于任意 $i \in \{1, \dots, m\}$，有 $T|_{V_U}\, v_i = Tv_i$。

首先，我们证明 $\dim \operatorname{null} T|_{V_U} = \dim \operatorname{null} T$。设 $v \in \operatorname{null} T|_{V_U}$，则 $T|_{V_U}\, v = 0$，因此 $Tv = 0$，即 $v \in \operatorname{null} T$。这说明 $\operatorname{null} T|_{V_U} \subseteq \operatorname{null} T$。另一方面，设 $v \in \operatorname{null} T$，则 $Tv = 0 \in U$，因此 $v \in V_U$，故 $T|_{V_U}\, v = 0$，即 $v \in \operatorname{null} T|_{V_U}$。这说明 $\operatorname{null} T \subseteq \operatorname{null} T|_{V_U}$。因此 $\dim \operatorname{null} T|_{V_U} = \dim \operatorname{null} T$。

其次，我们证明 $\dim \operatorname{range} T|_{V_U} = \dim(U \cap \operatorname{range} T)$。设 $w \in \operatorname{range} T|_{V_U}$，则存在 $v \in V_U$，使得 $T|_{V_U}\, v = w$。因此 $Tv = w$，且 $Tv \in U$，即 $w \in U \cap \operatorname{range} T$。这说明 $\operatorname{range} T|_{V_U} \subseteq U \cap \operatorname{range} T$。

另一方面，设 $w \in U \cap \operatorname{range} T$，则存在 $v \in V$，使得 $Tv = w$ 且 $w \in U$。由于 $v \in V_U$，因此 $T|_{V_U}\, v = w$。这说明 $U \cap \operatorname{range} T \subseteq \operatorname{range} T|_{V_U}$。因此 $\dim \operatorname{range} T|_{V_U} = \dim(U \cap \operatorname{range} T)$。

现在根据线性映射基本定理（原书 3.21），有

$$\dim V_U = \dim \operatorname{null} T|_{V_U} + \dim \operatorname{range} T|_{V_U}$$

代入上面的结果，得到 $\dim V_U = \dim \operatorname{null} T + \dim(U \cap \operatorname{range} T)$。■

习题 22 设 U 和 V 都是有限维向量空间，$S \in \mathcal{L}(V, W)$，$T \in \mathcal{L}(U, V)$. 证明:

$$\dim \operatorname{null} ST \leq \dim \operatorname{null} S + \dim \operatorname{null} T$$

证明 令 $N = \operatorname{null} ST$。由于 $ST \in \mathcal{L}(U, W)$，故 N 是 U 的子空间。设 $u_1, \dots, u_m$ 是 N 的一组基。根据线性映射引理（原书 3.4），存在 $T|_N \in \mathcal{L}(N, V)$，使得 $T|_N\, u_i = Tu_i$。设 $u \in N$，根据零空间的定义（原书 3.11），有 $STu = 0$，故 $\operatorname{range} T|_N \subseteq \operatorname{null} S$，即

$$\dim \operatorname{range} T|_N \leq \dim \operatorname{null} S \qquad \text{（式 1）}$$

根据线性映射基本定理（原书 3.21），有

$$\dim N = \dim \operatorname{null} T|_N + \dim \operatorname{range} T|_N \qquad \text{（式 2）}$$

注意到

$$\operatorname{null} T|_N = \{u \in N : T|_N\, u = 0\} = \{u \in N : Tu = 0\} = N \cap \operatorname{null} T \qquad \text{（式 3）}$$

将式 1 和式 3 代入式 2，得到

$$\dim N \leq \dim(N \cap \operatorname{null} T) + \dim \operatorname{null} S$$

由于 $N \cap \operatorname{null} T \subseteq \operatorname{null} T$，根据子空间的维数（原书 2.37），$\dim(N \cap \operatorname{null} T) \leq \dim \operatorname{null} T$，因此 $\dim \operatorname{null} ST \leq \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{null} S$。■

习题 23 设 U 和 V 都是有限维向量空间，$S \in \mathcal{L}(V, W)$，$T \in \mathcal{L}(U, V)$. 证明:

$$\dim \operatorname{range} ST \leq \min\{\dim \operatorname{range} S, \dim \operatorname{range} T\}$$

证明 首先证明 $\dim \operatorname{range} ST \leq \dim \operatorname{range} S$。设 $u \in U$, 则 $STu = S(Tu) \in \operatorname{range} S$, 故 $\operatorname{range} ST \subseteq \operatorname{range} S$，即 $\dim \operatorname{range} ST \leq \dim \operatorname{range} S$。

现在证明 $\dim \operatorname{range} ST \leq \dim \operatorname{range} T$。令 $I = \operatorname{range} T$，则 I 是 V 的子空间。根据线性映射引理（原书 3.4），存在 $S|_I \in \mathcal{L}(I, W)$，使得对于任意 $v \in I$，有 $S|_I\, v = Sv$。设 $u \in U$，则 $Tu \in I$，因此 $STu = S|_I\,(Tu)$。故 $\operatorname{range} ST = \operatorname{range} S|_I\, T \subseteq \operatorname{range} S|_I$，即 $\dim \operatorname{range} ST \leq \dim \operatorname{range} S|_I$。

由于 $S|_I$ 是从 I 到 W 的线性映射，根据线性映射基本定理（原书 3.21），有

$$\dim I = \dim \operatorname{null} S|_I + \dim \operatorname{range} S|_I$$

即 $\dim I \geq \dim \operatorname{range} S|_I$，又因为 $\dim \operatorname{range} ST \leq \dim \operatorname{range} S|_I$，故 $\dim \operatorname{range} ST \leq \dim \operatorname{range} T$。

综上所述，$\dim \operatorname{range} ST \leq \min\{\dim \operatorname{range} S, \dim \operatorname{range} T\}$。■

习题 24

(a) 设 $\dim V = 5$，且 $S, T \in \mathcal{L}(V)$，使得 $ST = 0$。证明 $\dim \operatorname{range} TS \leq 2$;

(b) 给出一例：$S, T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^5)$，使得 $ST = 0$ 且 $\dim \operatorname{range} TS = 2$。

解答 对于（a），根据线性映射基本定理（原书 3.21），有

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim \operatorname{null} S + \dim \operatorname{range} S \\ \dim V &= \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{range} T\end{aligned}$$

设 $v \in V$，则 $S(Tv) = STv = 0$，故 $\operatorname{range} T \subseteq \operatorname{null} S$，即 $\dim \operatorname{range} T \leq \dim \operatorname{null} S$。再代入 $\dim V = 5$，整理得

$$\dim \operatorname{range} T + \dim \operatorname{range} S \leq \dim \operatorname{null} S + \dim \operatorname{range} S = 5$$

注意到 $3 + 3 = 6 > 5$，故 $\dim \operatorname{range} T < 3$ 或 $\dim \operatorname{range} S < 3$。分类讨论：当 $\dim \operatorname{range} T < 3$ 时，即 $\dim \operatorname{range} T \leq 2$。考虑到

$$\operatorname{range} TS = \{Tv : v \in \operatorname{range} S\} \subseteq \operatorname{range} T$$

这说明 $\dim \operatorname{range} TS \leq \dim \operatorname{range} T \leq 2$。

另一方面，当 $\dim \operatorname{range} S < 3$ 时，即 $\dim \operatorname{range} S \leq 2$，故 $\dim \operatorname{null} S \geq 3$。根据“线性映射将 0 映射到 0”（原书 3.10），$0 \in \operatorname{null} T$，故

$$\operatorname{null} S = \{v \in V : Sv = 0\} \subseteq \{v \in V : Sv \in \operatorname{null} T\} = \operatorname{null} TS$$

这说明 $3 \leq \dim \operatorname{null} S \leq \dim \operatorname{null} TS$，再根据线性映射基本定理（原书 3.21），可得 $\dim \operatorname{range} TS \leq 2$。

对于（b），设 $v_1, ..., v_5$ 是 $\mathbb{F}^5$ 的一组基。根据线性映射引理（原书 3.4），存在 $S, T \in \mathcal{L}(V)$, 使得 $Sv_1 = Sv_2 = Sv_3 = 0, Sv_4 = v_4, Sv_5 = v_5$, 以及 $Tv_1 = Tv_2 = Tv_3 = 0, Tv_4 = v_1$，$Tv_5 = v_2$。

设 $v \in \mathbb{F}^5$，将 v 表示为 $v = a_1v_1 + \cdots + a_5v_5$，其中 $a_1, ..., a_5 \in \mathbb{F}$。则

$$\begin{aligned} STv &= S(a_1Tv_1 + \cdots + a_5Tv_5) \\ &= S(a_4v_1 + a_5v_2) \\ &= a_4Sv_1 + a_5Sv_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

这说明 $ST = 0$。而

$$\begin{aligned} TSv &= T(a_1Sv_1 + \cdots + a_5Sv_5) \\ &= T(a_4v_4 + a_5v_5) \\ &= a_4Tv_4 + a_5Tv_5 \\ &= a_4v_1 + a_5v_2 \end{aligned}$$

这说明 $\operatorname{range} TS = \operatorname{span}(v_1, v_2)$，因此 $\dim \operatorname{range} TS = 2$。综上所述，$S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^5)$，使得 $ST = 0$ 且 $\dim \operatorname{range} TS = 2$。

习题 25 设 W 是有限维向量空间，$S, T \in \mathcal{L}(V, W)$。证明：$\operatorname{null} S \subseteq \operatorname{null} T$，当且仅当，存在 $E \in \mathcal{L}(W)$，使得 $T = ES$。

证明 首先假设 $\operatorname{null} S \subseteq \operatorname{null} T$。令 $U = \operatorname{range} S$，设 $w_1, ..., w_m$ 是 U 的一组基。可以找到 $v_1, ..., v_m \in V$，使得对于 $i \in \{1, ..., m\}$，$Sv_i = w_i$。

根据线性映射引理（原书 3.4），存在 $E|_U \in \mathcal{L}(U, W)$，使得对于任意 $i \in \{1, ..., m\}$，有 $E|_U\, w_i = Tv_i$。进一步，根据 3A 节习题 13（见第 69 页），存在 $E \in \mathcal{L}(W)$，使得对于任意 $u \in U$，有 $Eu = E|_U\, u$。

设 $v \in V$，将 Sv 表示为 $Sv = a_1w_1 + \cdots + a_mw_m$，其中 $a_1, ..., a_m \in \mathbb{F}$。则

$$Sv = u = \sum_{k=1}^{m} c_k w_k = \sum_{k=1}^{m} c_k S v_k = S\left(\sum_{k=1}^{m} c_k v_k\right)$$

令 $v_\Delta = v - \sum_{k=1}^{m} c_k v_k$，则 $Sv_\Delta = 0$，即 $v_\Delta \in \operatorname{null} S \subseteq \operatorname{null} T$，故 $Tv_\Delta = 0$，即

$$Tv = T\left(\sum_{k=1}^{m} c_k v_k\right) = E\left(\sum_{k=1}^{m} c_k w_k\right) = ESv$$

这说明 $T=ES$。

另一方面，现在假设存在 $E\in\mathcal{L}(W)$，使得 $T=ES$。设 $v\in\operatorname{null}S$，即 $Sv=0$，则 $Tv=ESv=E0=0$，故 $v\in\operatorname{null}T$。这说明 $\operatorname{null}S\subseteq\operatorname{null}T$。

综上所述，$\operatorname{null}S\subseteq\operatorname{null}T$，当且仅当，存在 $E\in\mathcal{L}(W)$，使得 $T=ES$。■

习题 26 设 V 是有限维向量空间，$S,T\in\mathcal{L}(V)$。证明：$\operatorname{range}S\subseteq\operatorname{range}T$，当且仅当，存在 $E\in\mathcal{L}(V)$，使得 $S=TE$。

证明 首先假设 $\operatorname{range}S\subseteq\operatorname{range}T$。设 $v_1,\dots,v_m$ 是 V 的一组基。对于每个 $i\in\{1,\dots,m\}$，由于 $Sv_i\in\operatorname{range}S\subseteq\operatorname{range}T$，因此存在 $u_i\in V$，使得 $Tu_i=Sv_i$。

根据线性映射引理（原书 3.4），存在 $E\in\mathcal{L}(V,V)$，使得对于任意 $i\in\{1,\dots,m\}$，有 $Ev_i=u_i$。设 $v\in V$，将 v 表示为 $v=a_1v_1+\cdots+a_mv_m$，其中 $a_1,\dots,a_m\in\mathbb{F}$。则

$$Sv=S\left(\sum_{k=1}^{m}a_kv_k\right)=T\left(\sum_{k=1}^{m}a_ku_k\right)=T\left(\sum_{k=1}^{m}a_kEv_k\right)=TEv$$

这说明 $S=TE$。

另一方面，现在假设存在 $E\in\mathcal{L}(V)$，使得 $S=TE$。设 $w\in\operatorname{range}S$，则存在 $v\in V$，使得 $Sv=w$。因此

$$w=Sv=TEv=T(Ev)\in\operatorname{range}T$$

这说明 $\operatorname{range}S\subseteq\operatorname{range}T$。

综上所述，$\operatorname{range}S\subseteq\operatorname{range}T$，当且仅当，存在 $E\in\mathcal{L}(V)$，使得 $S=TE$。■

习题 27 设 $P\in\mathcal{L}(V)$，且 $P^2=P$。证明：$V=\operatorname{null}P\oplus\operatorname{range}P$。

证明 设 $v\in V$，则 $Pv=P(Pv)$，故 $P(v-Pv)=0$，即 $v-Pv\in\operatorname{null}P$，另一方面，$Pv\in\operatorname{range}P$，即

$$v=(v-Pv)+Pv$$

其中 $v-Pv\in\operatorname{null}N$ 且 $Pv\in\operatorname{range}P$，故 $V=\operatorname{null}P+\operatorname{range}P$。

下面说明这个和是直和。设 $v\in\operatorname{null}P\cap\operatorname{range}P$，则 $Pv=0$ 且存在 $w\in V$，使得 $v=Pw$。故

$$0=Pv=P^2w=Pw=v$$

即 $\operatorname{null}P\cap\operatorname{range}P=\{0\}$。因此，根据“两个子空间的直和”（原书 1.46），得 $V=\operatorname{null}P\oplus\operatorname{range}P$。■

习题 28 设 $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$，满足对于任意非常数多项式 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$，都有 $\deg Dp = (\deg p) - 1$。证明：D 是满射。

注 上面的记号 D 是用来让你想起微分映射[注5]，它将多项式 p 映射到其导数 p'。

证明 对于 $k \in \mathbb{N}^+$，令 $p_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 为 $z \mapsto z^k$，以及 $q_{k-1} = Dp_k$。于是 $\deg p_k = k$，故 $\deg q_k = \deg q_{k+1} - 1 = k$。设 $r \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$，使得 $\deg r = m$，故 $r \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$。

根据 2C 节习题 9（见第 55 页），$q_0, ..., q_m$ 是 $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ 的一组基。故存在 $a_0, ..., a_m \in \mathbb{R}$，使得

$$r = \sum_{k=0}^{m} a_k q_k = \sum_{k=0}^{m} a_k Dp(k+1) = D\left(\sum_{k=0}^{m} a_k p_{k+1}\right)$$

这说明 r 可以被 $\sum_{k=0}^{m} a_k p_{k+1} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 映射到，因此 D 是满射。■

习题 29 设 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$。证明：存在多项式 $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$，使得 $5q'' + 3q' = p$。

注 这道题不一定要用线性代数，但是线性代数的解答更有趣。

证明 令 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 上的映射 T 为 $p \mapsto 5p'' + 3p'$，容易验证 T 为线性映射，且对于任意 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$，$\deg Tp = \deg p - 1$。于是，根据习题 28，$T$ 是满射。

这说明，对于任意 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$，都存在 $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$，使得 $Tq = p$，即 $5q'' + 3q' = p$。■

习题 30 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$，$u \in V$，满足 $\varphi \neq 0$ 且 $u \notin \operatorname{null} \varphi$。证明：

$$V = \operatorname{null} \varphi \oplus \{au : a \in \mathbb{F}\}$$

证明 设 $v \in V$，满足 $\varphi v \neq 0$。令 $k = \frac{\varphi v}{\varphi u} \in \mathbb{F}$，则 $\varphi(ku) = \varphi v$，故 $\varphi(v - ku) = 0$，即 $v - ku \in \operatorname{null} \varphi$。因此

$$v = (v - ku) + ku$$

其中 $v - ku \in \operatorname{null} \varphi$ 且 $ku \in \{au : a \in \mathbb{F}\}$，故 $V = \operatorname{null} \varphi + \{au : a \in \mathbb{F}\}$。现在说明这个和是直和：将 0 表示为 $0 = v + w$，其中 $v \in \operatorname{null} \varphi$ 且 $w \in \{au : a \in \mathbb{F}\}$，于是

$$\varphi 0 = \varphi(v + w) = \varphi w$$

设 $w = au$，则 $\varphi w = a\varphi u$，由于 $\varphi u \neq 0$，故 $a = 0$，即 $w = 0$。进一步，由于 $0 = v + w$，故 $v = 0$。根据直和的条件（原书 1.45），得 $V = \operatorname{null} \varphi \oplus \{au : a \in \mathbb{F}\}$。■

[注5] 注意，微分映射是满足题设条件的映射，但并非满足题设条件的映射就一定是微分映射。

习题 31 设 V 是有限维向量空间，X 是 V 的子空间，Y 是 W 的有限维子空间。证明：存在 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 使得 $\operatorname{null} T = X$ 且 $\operatorname{range} T = Y$，当且仅当，$\dim X + \dim Y = \dim V$。

证明 首先，假设存在 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 使得 $\operatorname{null} T = X$ 且 $\operatorname{range} T = Y$。根据线性映射基本定理（原书 3.21），立即可得 $\dim X + \dim Y = \dim V$。

现在假设 $\dim X + \dim Y = \dim V$。令 $n = \dim V$。设 $w_1, \ldots, w_m$ 是 Y 的一组基，$v_{m+1}, \ldots, v_n$ 是 X 的一组基，根据"每个线性无关组都可被扩充成基"（原书 2.32），可以找到 $v_1, \ldots, v_m \in V$，使得 $v_1, \ldots, v_n$ 是 V 的一组基。

根据线性映射引理（原书 3.4），存在 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，使得对于任意 $i \in \{1, \ldots, m\}$，有 $Tv_i = w_i$，且对于任意 $i \in \{m+1, \ldots, n\}$，有 $Tv_i = 0$。

设 $v \in X$，则存在 $a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$，使得 $v = a_{m+1}v_{m+1} + \cdots + a_n v_n$。因此

$$Tv = T\left(\sum_{k=m+1}^{n} a_k v_k\right) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k T v_k = 0$$

这说明 $X \subseteq \operatorname{null} T$。另一方面，设 $v \in \operatorname{null} T$，将 v 表示为 $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$，其中 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$。由于 $Tv = 0$，因此

$$0 = Tv = T\left(\sum_{k=1}^{n} a_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k T v_k = \sum_{k=1}^{m} a_k w_k$$

由于 $w_1, \ldots, w_m$ 是线性无关的，故 $a_1 = \cdots = a_m = 0$，即 $v \in X$。因此 $\operatorname{null} T \subseteq X$，故 $\operatorname{null} T = X$。

设 $w \in Y$，则存在 $b_1, \ldots, b_m \in \mathbf{F}$，使得 $w = b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m$。注意到

$$T\left(\sum_{k=1}^{m} b_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{m} b_k T v_k = \sum_{k=1}^{m} b_k w_k = w$$

这说明 $Y \subseteq \operatorname{range} T$。另一方面，设 $w \in \operatorname{range} T$，则存在 $v \in V$，使得 $Tv = w$。将 v 表示为 $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$，其中 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{F}$。则

$$w = Tv = T\left(\sum_{k=1}^{n} a_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{m} a_k T v_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k T v_k = \sum_{k=1}^{m} a_k w_k$$

这说明 $w \in \operatorname{span}(w_1, \ldots, w_m) = Y$。因此 $\operatorname{range} T \subseteq Y$，故 $\operatorname{range} T = Y$。

综上所述，存在 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 使得 $\operatorname{null} T = X$ 且 $\operatorname{range} T = Y$，当且仅当，$\dim X + \dim Y = \dim V$。 ■

习题 32 设 V 是有限维向量空间，$\dim V > 1$。证明：若 $\varphi : \mathcal{L}(V) \to \mathbf{F}$ 是线性映射，使得对于任意 $S, T \in \mathcal{L}(V)$，$\varphi(ST) = \varphi(S)\varphi(T)$，则 $\varphi = 0$。

提示 3A 节习题 17（见第 70 页）中给出了关于 $\mathcal{L}(V)$ 的双边理想的描述，或许有用。

证明 设 $S \in \operatorname{null} T$，$T \in \mathcal{L}(V)$，则 $\varphi(S) = 0$，故 $\varphi(ST) = \varphi(TS) = \varphi(S)\varphi(T) = 0$，即 $ST, TS \in \operatorname{null} T$，故 $\operatorname{null} T$ 是 $\mathcal{L}(V)$ 的双边理想。根据 3A 节习题 17（见第 70 页），$\operatorname{null} T = \{0\}$ 或 $\operatorname{null} T = \mathcal{L}(V)$。

由于 $\dim V > 1$，容易验证 $\dim \mathcal{L}(V) > 1 = \dim \mathbf{F}$，根据“映到更低维空间上的线性映射不是单射”（原书 3.22），可知 T 不是单射。再根据“单射性 $\Longleftrightarrow$ 零空间为 $\{0\}$”（原书 3.15），$\operatorname{null} T \neq \{0\}$，因此 $\operatorname{null} T = \mathcal{L}(V)$。这说明对于任意 $S \in \mathcal{L}(V)$，都有 $S \in \operatorname{null} T$，即 $\varphi(S) = 0$。故 $\varphi = 0$。■

习题 33 设 V 和 W 都是实向量空间，$T \in \mathcal{L}(V, W)$。定义 $T_{\mathbf{C}} : V_{\mathbf{C}} \to W_{\mathbf{C}}$ 为对于任意 $u, v \in V$，

$$T_{\mathbf{C}}(u + \mathrm{i}v) = Tu + \mathrm{i}Tv$$

(a) 证明：$T_{\mathbf{C}}$ 是 $V_{\mathbf{C}} \to W_{\mathbf{C}}$ 的（复）线性映射；
(b) 证明：$T_{\mathbf{C}}$ 是单射，当且仅当 T 是单射；
(c) 证明：$\operatorname{range} T_{\mathbf{C}} = W_{\mathbf{C}}$，当且仅当 $\operatorname{range} T = W$。

注 复化 $V_{\mathbf{C}}$ 定义于 1B 节习题 8（见第 10 页），线性映射 $T_{\mathbf{C}}$ 被称为线性映射 T 的复化（complexification）。

证明 对于（a），我们逐条验证线性映射的定义（原书 3.1）中给出的要求：

可加性 对于任意 $u, v \in V_{\mathbf{C}}$，均有 $T_{\mathbf{C}}(u + v) = T_{\mathbf{C}}u + T_{\mathbf{C}}v$。
证明：设 $u = u_1 + \mathrm{i}u_2$，$v = v_1 + \mathrm{i}v_2$，其中 $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$。则

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{C}}(u + v) &= T_{\mathbf{C}}((u_1 + v_1) + \mathrm{i}(u_2 + v_2)) \\ &= T(u_1 + v_1) + \mathrm{i}T(u_2 + v_2) \\ &= Tu_1 + \mathrm{i}Tu_2 + Tv_1 + \mathrm{i}Tv_2 \\ &= T_{\mathbf{C}}u + T_{\mathbf{C}}v \end{aligned}$$

齐次性 对于任意 $\lambda \in \mathbf{C}$，$u \in V_{\mathbf{C}}$，均有 $T_{\mathbf{C}}(\lambda u) = \lambda T_{\mathbf{C}}u$。
证明：设 $u = u_1 + \mathrm{i}u_2$，其中 $u_1, u_2 \in V$。则

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{C}}(\lambda u) &= T_{\mathbf{C}}(\lambda(u_1 + \mathrm{i}u_2)) \\ &= T(\lambda u_1) + \mathrm{i}T(\lambda u_2) \\ &= \lambda Tu_1 + \mathrm{i}\lambda Tu_2 \\ &= \lambda(Tu_1 + \mathrm{i}Tu_2) \\ &= \lambda T_{\mathbf{C}}u \end{aligned}$$

这说明 $T_{\mathbf{C}}$ 确实是 $V_{\mathbf{C}} \to W_{\mathbf{C}}$ 的线性映射。

对于（b），首先假设 $T_{\mathbf{C}}$ 是单射。根据"单射性 $\Longleftrightarrow$ 零空间为 $\{0\}$"（原书 3.15），可得 $\operatorname{null} T_{\mathbf{C}}=\{0\}$。设 $v \in \operatorname{null} T$，则根据"线性映射将 0 映射为 0"（原书 3.10），可得 $0=Tv=Tv+\mathrm{i}T0=T_{\mathbf{C}}(v+\mathrm{i}0)$，因此 $v=0$，即 $\operatorname{null} T=\{0\}$，故 T 是单射。

另一方面，假设 T 是单射。设 $u+\mathrm{i}v \in \operatorname{null} T_{\mathbf{C}}$，则 $0=T_{\mathbf{C}}(u+\mathrm{i}v)=Tu+\mathrm{i}Tv$，故 $Tu=Tv=0$。又因为 $\operatorname{null} T=\{0\}$，只能有 $u=v=0$，即 $\operatorname{null} T_{\mathbf{C}}=\{0\}$，因此 $T_{\mathbf{C}}$ 是单射。

对于（c），首先假设 $\operatorname{range} T_{\mathbf{C}}=W_{\mathbf{C}}$。设 $w \in W$，则存在 $u+\mathrm{i}v \in V_{\mathbf{C}}$，使得 $T(u+\mathrm{i}v)=w+\mathrm{i}0$，即 $Tu+\mathrm{i}Tv=w+\mathrm{i}0$，故 $Tu=w$。于是 $W \subseteq \operatorname{range} T$，即 $\operatorname{range} T=W$。

另一方面，假设 $\operatorname{range} T=W$。设 $w+\mathrm{i}v \in W_{\mathbf{C}}$，则存在 $u \in V$，使得 $Tu=w$。因此 $T_{\mathbf{C}}(u+\mathrm{i}v)=Tu+\mathrm{i}Tv=w+\mathrm{i}Tv$，即 $w+\mathrm{i}v \in \operatorname{range} T_{\mathbf{C}}$。这说明 $W_{\mathbf{C}} \subseteq \operatorname{range} T_{\mathbf{C}}$，即 $\operatorname{range} T_{\mathbf{C}}=W_{\mathbf{C}}$。 ■

3C 矩阵

习题 1 设 $T \in \mathcal{L}(V,W)$。证明：对于 V 和 W 的任意基，T 所对应的矩阵至少有 $\dim \operatorname{range} T$ 个非零元素。

证明 设 $v_1,\dots,v_n$ 是 V 的一组基，$w_1,\dots,w_m$ 是 W 的一组基，A 为 T 在这两组基下的矩阵表示。则对于 $i \in \{1,\dots,m\}$ 和 $j \in \{1,\dots,n\}$，

$$Tv_j = \sum_{k=1}^{m} A_{k,j} w_k$$

设 $p = \dim \operatorname{null} T$，且 $q = \dim \operatorname{range} T$，则根据线性映射基本定理（原书 3.21），$p + q = n$。则在 $v_1,\dots,v_n$ 中至多有 p 个向量属于 $\operatorname{null} T$，也即至少有 q 个向量不属于 $\operatorname{null} T$。不妨设 $v_1,\dots,v_q$ 不属于 $\operatorname{null} T$，则对于 $j \in \{1,\dots,q\}$，我们有

$$A_{1,j}w_1 + \cdots + A_{m,j}w_m = Tv_j \neq 0$$

考虑到 $w_1,\dots,w_m$ 线性无关，只能有至少一个 $k \in \{1,\dots,m\}$ 使得 $A_{k,j} \neq 0$。因此，矩阵 A 至少有 q 个非零元素。■

习题 2 设 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，其中 V 和 W 都是有限维的非零向量空间。证明：$\dim \operatorname{range} T = 1$，当且仅当，存在 V 的一组基和 W 的一组基，使得 $\mathcal{M}(T)$ 的所有元素都是 1。

证明 首先证明充分性。设 $v_1,\dots,v_n$ 是 V 的一组基，$w_1,\dots,w_m$ 是 W 的一组基，且在这两组基下的 $\mathcal{M}(T)$ 的所有元素都是 1。则对于 $j \in \{1,\dots,n\}$，

$$Tv_j = \sum_{k=1}^{m} 1w_k = w_1 + \cdots + w_m$$

故 $Tv_1 = \cdots = Tv_n$，记为 w。设 $v \in V$，则存在 $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{F}$ 使得 $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$。因此，

$$Tv = a_1Tv_1 + \cdots + a_nTv_n = (a_1 + \cdots + a_n)w \in \operatorname{span}(w)$$

故 $\operatorname{range} T = \operatorname{span}(w)$，因此 $\dim \operatorname{range} T = 1$。

另一方面，证明必要性。设 $\dim \operatorname{range} T = 1$，则存在 $w \in W$ 使得 $\operatorname{range} T = \operatorname{span}(w)$。设 $u_1,\dots,u_n$ 是 V 的一组基，则对于 $j \in \{1,\dots,n\}$，存在 $a_j \in \mathbb{F}$ 使得 $Tu_j = a_jw$，其中 $a_j \neq 0$。

现在，对于 $j \in \{1,\dots,n\}$，令 $v_j = u_j/a_j$，则 $Tv_1 = \cdots = Tv_n = w$。容易说明 $v_1,\dots,v_n$ 也是 V 的一组基。根据每个线性无关组都可被扩充为基（原书 2.32），我们可以将 w 扩充为 W 的一组基 $w, w_2,\dots,w_m$。

令 $w_1 = w - (w_2 + \cdots + w_m)$，则 $w_1,\dots,w_m$ 也是 W 的一组基，且 $w_1 + \cdots + w_m = w$。

设关于 $v_1, \dots, v_n$ 和 $w_1, \dots, w_m$ 的 $\mathcal{M}(T)$ 的元素为 $A_{i,j}$，则对于 $j \in \{1, \dots, n\}$，

$$\sum_{k=1}^{m} A_{k,j} w_k = T v_j = w$$

由于 $w_1, \dots, w_m$ 线性无关，因此对于 $k \in \{1, \dots, m\}$，都有 $A_{k,j} = 1$。因此，$\mathcal{M}(T)$ 的所有元素都是 1。

习题 3 设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基，$w_1, \dots, w_m$ 是 W 的一组基。证明：

(a) 若 $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$，则 $M(S+T) = M(S) + M(T)$；

(b) 若 $\lambda \in \mathbb{F}$，$T \in \mathcal{L}(V, W)$，则 $M(\lambda T) = \lambda M(T)$。

注 本题是在让你验证原书 3.35 和 3.38。

证明 对于 (a)，记 $A = M(S)$，$B = M(T)$，$C = M(S+T)$。则对于 $j \in \{1, \dots, n\}$，有

$$\sum_{k=1}^{m} C_{k,j} w_k = (S+T) v_j = S v_j + T v_j = \sum_{k=1}^{m} (A_{k,j} + B_{k,j}) w_k$$

故 $C_{k,j} = A_{k,j} + B_{k,j}$，即 $C = A + B$。

对于（b），记 $A = M(T)$，$B = M(\lambda T)$。则对于 $j \in \{1, \dots, n\}$，有

$$\sum_{k=1}^{m} B_{k,j} w_k = (\lambda T) v_j = \lambda (T v_j) = \sum_{k=1}^{m} (\lambda A_{k,j}) w_k$$

故 $B_{k,j} = \lambda A_{k,j}$，即 $B = \lambda A$。

习题 4 设 $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ 是微分映射，定义为 $p \mapsto p'$。求 $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ 的一个基和 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 的一个基，使得 $\mathcal{M}(D)$ 为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

注 和原书 3.33 比较一下。下一题拓展了本题。

解答 取 $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ 的基为 $x^3, x^2, x, 1$，$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 的基为 $3x^2, 2x, 1$。则

$$\begin{aligned} Dx^3 = 3x^2 &= 1 \cdot (3x^2) + 0 \cdot (2x) + 0 \cdot 1 \\ Dx^2 = 2x &= 0 \cdot (3x^2) + 1 \cdot (2x) + 0 \cdot 1 \\ Dx = 1 &= 0 \cdot (3x^2) + 0 \cdot (2x) + 1 \cdot 1 \\ D1 = 1 &= 0 \cdot (3x^2) + 0 \cdot (2x) + 0 \cdot 1 \end{aligned}$$

故

$$\mathcal{M}(D)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

习题 5 设 V 和 W 都是有限维向量空间，$T\in\mathcal{L}(V,W)$。证明：存在 V 的一组基和 W 的一组基，使得关于这些基的 $\mathcal{M}(T)$ 的第 k 行第 k 列元素为 1，其余元素为 0，其中 $k\in\{1,\dots,\dim\operatorname{range}T\}$。

证明 设向量组 $v_1,\dots,v_\ell$ 是 $\operatorname{null}T$ 的一组基，根据“每个线性无关组都可被扩充成基“（原书 2.32），可以找到 $v_{\ell+1},\dots,v_m$，使得 $v_1,\dots,v_m$ 是 V 的一组基。对于 $j\in\{1,\dots,m\}$，令 $w_j=Tv_j$，则根据 3B 节习题 10（见第 75 页），$w_1,\dots,w_m$ 张成 $\operatorname{range}T$。

另一方面，注意到 $w_1=\cdots=w_\ell=0$，因此根据线性相关性引理（原书 2.19），可得 $w_{\ell+1},\dots,w_m$ 张成 $\operatorname{range}T$。根据线性映射基本定理（原书 3.21），

$$\dim\operatorname{range}T=\dim V-\dim\operatorname{null}T=m-\ell$$

再根据“长度恰当的张成组是基”（原书 2.42），可知 $w_{\ell+1},\dots,w_m$ 是 $\operatorname{range}T$ 的一组基。

现在，将 $w_{\ell+1},\dots,w_m$ 扩充为 W 的一组基 $u_1,\dots,u_n$，其中 $u_1=w_{\ell+1},\dots,u_{m-\ell}=w_m$。现在考虑关于基 $v_{\ell+1},\dots,v_m,v_1,\dots,v_\ell$（注意顺序）和基 $u_1,\dots,u_n$ 的 $\mathcal{M}(T)$，则对于 $j\in\{1,\dots,m-\ell\}$，

$$Tv_{\ell+j}=u_j=0\cdot u_1+\cdots+0\cdot u_{j-1}+1\cdot u_j+0\cdot u_{j+1}+\cdots+0\cdot u_n$$

而对于 $j\in\{m-\ell+1,\dots,m\}$，$Tv_j=0$。因此，关于这些基的 $\mathcal{M}(T)$ 的第 k 行第 k 列元素为 1，其余元素为 0，其中 $k\in\{1,\dots,\dim\operatorname{range}T\}$。 ■

习题 6 设 $v_1,\dots,v_m$ 是 V 的一组基，W 是有限维向量空间。设 $T\in\mathcal{L}(V,W)$。证明：存在 W 的一组基 $w_1,\dots,w_n$，使得关于基 $v_1,\dots,v_m$ 和 $w_1,\dots,w_n$ 的 $\mathcal{M}(T)$ 的第一行第一列的元素为 1 或 0，且第一列的其余元素均为 0。

注 不同于习题 4，在本题中，V 的基是给定的而不是由你给定的。

证明 分类讨论，当 $Tv_1=0$ 时，任取 W 的一组基为 $w_1,\dots,w_n$，则

$$Tv_1=0=0\cdot w_1+\cdots+0\cdot w_n$$

于是 $\mathcal{M}(T)$ 的第一列的元素均为 0。

当 $Tv_1\neq 0$ 时，取 $w_1=Tv_1$。根据“每个线性无关组都可被扩充成基”（原书 2.32），可以将 w_1 扩充为 W 的一组基 $w_1,\dots,w_n$。则

$$Tv_1=w_1=1\cdot w_1+0\cdot w_2+\cdots+0\cdot w_n$$

于是 $\mathcal{M}(T)$ 的第一行第一列的元素为 1，且第一列的其余元素均为 0。

综上所述，存在 W 的一组基 $w_1, ..., w_n$，使得关于基 $v_1, ..., v_m$ 和 $w_1, ..., w_n$ 的 $\mathcal{M}(T)$ 的第一行第一列的元素为 1 或 0，且第一列的其余元素均为 0。■

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$